Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark

WS 2011/12
28.01.2012

Übungsklausur

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

a) Zunächst bestimmen wir die Polarkoordinaten von $\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$. Der Betrag dieser Zahl lautet

$$\left|\tfrac{1}{2}(1+i\sqrt{3})\right| = \tfrac{1}{2}\left(1^2+\sqrt{3}^2\right)^{1/2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{4} = 1\,.$$

Für das Argument $\varphi \in (-\pi,\pi]$ von $\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$ ergibt sich

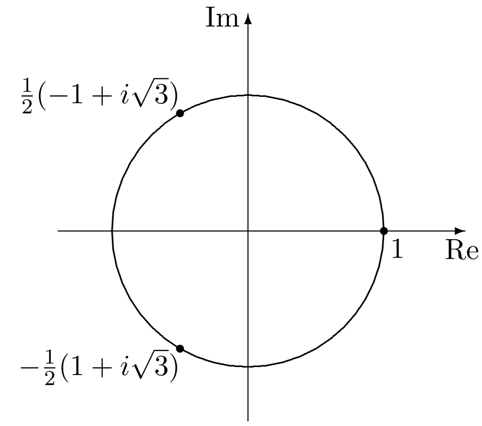
$$\tfrac{1}{2}(1+i\sqrt{3}) = 1\cdot e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad\Longleftrightarrow\quad \cos\varphi = \tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad \sin\varphi = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \quad\Longleftrightarrow\quad \varphi = \tfrac{\pi}{3}\,.$$

Also ist $\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}) = e^{i\pi/3}$ und man erhält für alle $n \in \mathbb{N}$

$$z_n = (e^{i\pi/3})^{2n} = e^{i\frac{2\pi}{3}n} = \begin{cases} e^{i2\pi k} = 1 & \text{falls } n = 3k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \\ e^{i(2\pi k + \frac{2\pi}{3})} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}) & \text{falls } n = 3k+1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0, \\ e^{i(2\pi k + \frac{4\pi}{3})} = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3}) & \text{falls } n = 3k+2 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Infolgedessen sind 1, $\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$ und $-\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$ Häufungswerte von $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Aufgrund von $\{3k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{3k+1 : k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{3k+2 : k \in \mathbb{N}_0\} = \mathbb{N}$ besitzt die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine weiteren Häufungswerte.

Skizze der Häufungswerte:



b) Mit $e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} w^n$, $w \in \mathbb{C}$, folgt für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$

$$f(z) = \frac{e^2}{z-2}\,(e^{z-2}-1) = \frac{e^2}{z-2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(z-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^2}{n!}(z-2)^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^2}{(k+1)!}(z-2)^k\,.$$

c) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} 4\cosh(x)\sinh(x) < e^2 \quad&\Longleftrightarrow\quad (e^x+e^{-x})(e^x-e^{-x}) < e^2 \quad\Longleftrightarrow\quad e^{2x}-e^{-2x} < e^2 \\ \Longleftrightarrow\quad e^{4x}-1 < e^2e^{2x} \quad&\Longleftrightarrow\quad e^{4x}-e^2e^{2x} < 1 \quad\Longleftrightarrow\quad (e^{2x}-e^2/2)^2 < 1+e^4/4 \\ \Longleftrightarrow\quad |e^{2x}-e^2/2| < \sqrt{1+e^4/4} \quad&\Longleftrightarrow\quad -\sqrt{1+e^4/4} < e^{2x}-e^2/2 < \sqrt{1+e^4/4} \\ \Longleftrightarrow\quad e^2/2-\sqrt{1+e^4/4} < e^{2x} &< e^2/2+\sqrt{1+e^4/4}\,. \qquad (*) \end{aligned}$$

Wegen $\sqrt{1+e^4/4} > \sqrt{e^4/4} = e^2/2$ ist $e^2/2 - \sqrt{1+e^4/4} < 0$. Da $e^y > 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt, liefert die linke Ungleichung in $(*)$ keine Bedingung an x. Somit ist $(*)$ äquivalent zu

$$e^{2x} < e^2/2+\sqrt{1+e^4/4} \quad\Longleftrightarrow\quad 2x < \ln\bigl(e^2/2+\sqrt{1+e^4/4}\bigr) \quad\Longleftrightarrow\quad x < \tfrac{1}{2}\ln\bigl(e^2/2+\sqrt{1+e^4/4}\bigr)\,.$$

Also ist

$$\bigl\{x \in \mathbb{R} \,:\, 4\cosh(x)\sinh(x) < e^2\bigr\} = \bigl(-\infty, \tfrac{1}{2}\ln\bigl(e^2/2+\sqrt{1+e^4/4}\bigr)\bigr)\,.$$

Aufgabe 2

a) Wir zeigen $a_n = 3^n - \frac{1}{3^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mittels (starker) Induktion.

Induktionsanfang: Es gilt $a_0 = 0 = 3^0 - \frac{1}{3^0}$ und $a_1 = \frac{8}{3} = 3^1 - \frac{1}{3^1}$. Also ist die Gleichung $a_n = 3^n - \frac{1}{3^n}$ für $n = 0$ und $n = 1$ erfüllt.

Induktionsschluss: Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gelte sowohl $a_{n-1} = 3^{n-1} - \frac{1}{3^{n-1}}$ als auch $a_n = 3^n - \frac{1}{3^n}$ (IV). Dann folgt mit der Rekursionsformel

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \tfrac{10}{3}a_n - a_{n-1} \overset{\text{(IV)}}{=} \tfrac{10}{3}\bigl(3^n - \tfrac{1}{3^n}\bigr) - \bigl(3^{n-1} - \tfrac{1}{3^{n-1}}\bigr) \\ &= 3^n\bigl(\tfrac{10}{3} - \tfrac{1}{3}\bigr) - \tfrac{1}{3^n}\bigl(\tfrac{10}{3} - 3\bigr) = 3^n \cdot 3 - \tfrac{1}{3^n} \cdot \tfrac{1}{3} = 3^{n+1} - \tfrac{1}{3^{n+1}}\,. \end{aligned}$$

b) **i)** Es gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{\text{a)}}{=} \frac{3^{n+1} - \frac{1}{3^{n+1}}}{3^n - \frac{1}{3^n}} = \frac{3 - \frac{1}{3^{2n+1}}}{1 - \frac{1}{3^{2n}}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{3-0}{1-0} = 3\,.$$

ii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{3^n - \tfrac{1}{3^n}} \leqslant \sqrt[n]{3^n} = 3$$

und

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{3^n - \tfrac{1}{3^n}} = \sqrt[n]{3^n\bigl(1 - \tfrac{1}{3^{2n}}\bigr)} = 3\sqrt[n]{1 - \tfrac{1}{9^n}} \geqslant 3\sqrt[n]{1 - \tfrac{1}{9}} = 3\sqrt[n]{\tfrac{8}{9}}\,,$$

also

$$3\sqrt[n]{\tfrac{8}{9}} \leqslant \sqrt[n]{a_n} \leqslant 3\,.$$

Wegen $3\sqrt[n]{8/9} \xrightarrow{n\to\infty} 3 \cdot 1 = 3$ folgt hieraus mit dem Sandwichkriterium $\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow{n\to\infty} 3$.

c) Aus $\sqrt[n]{a_n} \to 3$ und $\sqrt[n]{n} \to 1$ ergibt sich $\sqrt[n]{\frac{a_n}{n}} = \frac{\sqrt[n]{a_n}}{\sqrt[n]{n}} \to \frac{3}{1} = 3$ für $n \to \infty$. Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}(z - 5i + \pi)^n$ beträgt daher $\frac{1}{3}$.

Aufgabe 3

a) Unter Verwendung von $a - b = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$ für $a \neq b$ erhält man für jedes $x > 1$

$$\begin{aligned} x^{4/3}\bigl(\sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt[3]{x^2-1}\bigr) &= x^{4/3}\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{(x^2+1)^{2/3} + [(x^2+1)(x^2-1)]^{1/3} + (x^2-1)^{2/3}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{x^{4/3}}} \cdot \frac{2}{(x^2+1)^{2/3} + (x^4-1)^{1/3} + (x^2-1)^{2/3}} \\ &= \frac{2}{(1+\frac{1}{x^2})^{2/3} + (1-\frac{1}{x^4})^{1/3} + (1-\frac{1}{x^2})^{2/3}} \\ &\xrightarrow{x\to\infty} \frac{2}{(1+0)^{2/3} + (1-0)^{1/3} + (1-0)^{2/3}} = \frac{2}{3}\,. \end{aligned}$$

b) Definiere $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (1+\ln x)x$.

1. Schritt: Es gibt mindestens ein $x_0 \in (0,\infty)$ mit $f(x_0) = 1$.
Denn: Es ist $f(1) = 1$ und $1 \in (0,\infty)$. *Alternativ:* Es gilt $f(e^{-2}) = (1-2)e^{-2} = -e^{-2} < 0 < 1$ und $f(e) = (1+1)e > e > 1$. Da f als Komposition stetiger Funktionen stetig ist, gibt es nach dem Zwischenwertsatz (mindestens) ein $x_0 \in [e^{-2}, e] \subset (0,\infty)$ mit $f(x_0) = 1$.

2. Schritt: Es gibt höchstens ein $x_0 \in (0,\infty)$ mit $f(x_0) = 1$.
Denn: Für jedes $x \in (0, e^{-1}]$ gilt $1 + \ln x \leqslant 0$, also auch $f(x) \leqslant 0$. Demnach existiert kein $x_0 \in (0, e^{-1}]$ mit $f(x_0) = 1$. Auf (e^{-1}, ∞) ist f streng monoton wachsend, weil f das Produkt der streng monoton wachsenden Funktionen $x \mapsto 1+\ln x$ und $x \mapsto x$ ist, die beide auf (e^{-1},∞) positiv sind. Insbesondere ist f auf (e^{-1},∞) injektiv, so dass es höchstens ein $x_0 \in (e^{-1},\infty)$ mit $f(x_0) = 1$ geben kann.

Aufgabe 4

a) Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$s_N := \sum_{k=1}^{N} \frac{(k+1-\frac{k}{e})e^{-k}}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{e^{-k}}{k} - \frac{e^{-(k+1)}}{k+1} \right) = \frac{e^{-1}}{1} - \frac{e^{-(N+1)}}{N+1},$$

weil es sich um eine Teleskopsumme handelt. Wegen $\frac{e^{-(N+1)}}{N+1} \xrightarrow{N\to\infty} 0$ ist $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert e^{-1}, d.h. die zu untersuchende Reihe konvergiert und hat den Reihenwert e^{-1}.

b) Wir schreiben

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(4x)^k}{(1+2|x|)^{k-1}} = 4x \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4x}{1+2|x|} \right)^{k-1} = 4x \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4x}{1+2|x|} \right)^{n}.$$

Bei der gegebenen Reihe handelt es sich also um eine geometrische Reihe, welche genau für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\left|\frac{4x}{1+2|x|}\right| < 1$ konvergiert. Es gilt

$$\left|\frac{4x}{1+2|x|}\right| < 1 \iff 4|x| < 1 + 2|x| \iff 2|x| < 1 \iff |x| < 1/2\,.$$

D.h. die Reihe konvergiert genau für alle $x \in (-1/2, 1/2)$. Für diese x erhält man als Reihenwert

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(4x)^k}{(1+2|x|)^{k-1}} = 4x \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4x}{1+2|x|} \right)^{n} = 4x \frac{1}{1 - \frac{4x}{1+2|x|}} = \frac{4x + 8x|x|}{1+2|x|-4x}\,.$$

c) Die Funktion f ist stetig in 0, denn für $x \neq 0$ gilt

$$|f(x)| = |\sin x|\,|\cos(1/x)| \leqslant |\sin x| \xrightarrow{x\to 0} 0\,,$$

woraus $f(x) \xrightarrow{x\to 0} 0 = f(0)$ folgt.

Wir begründen, dass f nicht differenzierbar in 0 ist, und betrachten dazu die beiden Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} := ((2k\pi)^{-1})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} := ((2k\pi+\pi)^{-1})_{k\in\mathbb{N}}$. Dann sind $x_k \neq 0$, $y_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und es gilt $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$ sowie $\lim_{k\to\infty} y_k = 0$. Mit $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ erhalten wir

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(x_k) - f(0)}{x_k - 0} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sin x_k}{x_k} \cos(1/x_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{\sin x_k}{x_k} \cdot 1 = 1$$

und

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(y_k) - f(0)}{y_k - 0} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sin y_k}{y_k} \cos(1/y_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{\sin y_k}{y_k} \cdot (-1) = -1\,.$$

Deshalb existiert der Grenzwert $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ nicht, d.h. f ist nicht differenzierbar in 0.