Karlsruhe Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos

WS 2014/15
24.01.2015

Übungsklausur

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

a) **i)** **(3 Punkte)** Der Ausdruck

$$\lim_{x\to 1-} \ln(x)\,\ln(1-x) = \lim_{x\to 1-} \frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln(x)}}$$

ist von der Form "$\frac{\infty}{\infty}$". Die Ableitung von $x \mapsto \frac{1}{\ln(x)}$ ist in einer Umgebung von 1 ungleich Null. Es gilt

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\frac{d}{dx}\ln(1-x)}{\frac{d}{dx}\frac{1}{\ln(x)}} = \lim_{x\to 1-} \frac{\frac{-1}{1-x}}{\frac{-1}{(\ln(x))^2}\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1-} \frac{x\,(\ln(x))^2}{1-x}\,.$$

Da die Ableitung von $x \mapsto 1-x$ in einer Umgebung von 1 nicht verschwindet, folgt nach der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{x\to 1-} \frac{(\ln(x))^2}{1-x} = \lim_{x\to 1-} \frac{2\ln(x)\cdot\frac{1}{x}}{-1} = 0\,.$$

Hiermit ergibt sich

$$\lim_{x\to 1-} \frac{x\,(\ln(x))^2}{1-x} = 1\cdot 0 = 0$$

und die Regel von de l'Hospital liefert für den zu untersuchenden Grenzwert

$$\lim_{x\to 1-} \ln(x)\,\ln(1-x) = \lim_{x\to 1-} \frac{\frac{d}{dx}\ln(1-x)}{\frac{d}{dx}\frac{1}{\ln(x)}} = 0\,.$$

ii) **(2 Punkte)** Wegen $\lim_{x\to 0}\sin(\cos x) = \sin(\cos 0) \neq 0$ ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(\cos x)} = \frac{0}{\sin(\cos 0)} = 0\,.$$

b) **(5 Punkte)** Ist für $n \in \mathbb{N}$

$$b_n := \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!}\right)^n$$

gesetzt, so gilt

$$\sqrt[n]{\frac{b_n}{n^3}} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^3}\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!} \to \frac{1}{1^3}\cdot e^2 = e^2 \qquad \text{für } n\to\infty\,.$$

Der Konvergenzradius R der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n^3}x^n$ beträgt also $R = e^{-2}$. Deshalb ist die Potenzreihe für alle $x\in\mathbb{R}$ mit $|x| < e^{-2}$ konvergent und für alle $x\in\mathbb{R}$ mit $|x| > e^{-2}$ divergent. Zu untersuchen verbleibt der Fall $|x| = e^{-2}$, also $x = e^{-2}$ oder $x = -e^{-2}$:

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt wegen $0 < \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} \leqslant e^2$

$$0 < b_n \leqslant e^{2n}$$

und damit

$$0 < \left| b_n x^n \right| = b_n |x|^n \leqslant e^{2n} \, (e^{-2})^n = 1 \,.$$

Demzufolge erhält man für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{b_n}{n^3} \, x^n \right| = \frac{1}{n^3} \left| b_n x^n \right| \leqslant \frac{1}{n^3} \,.$$

Aufgrund der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ ist die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^3} \, x^n$ für $|x| = e^{-2}$ nach dem Majorantenkriterium konvergent.

Fazit: Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^3} \, x^n$ konvergiert genau für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leqslant e^{-2}$.

Aufgabe 2

a) **(5 Punkte)** Die Funktion f ist auf dem gesamten Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ differenzierbar. In jeder Maximum- oder Minimumstelle im Innern des Intervalls verschwindet daher die Ableitung von f. Es gilt

$$f'(x) = -\sin x - \sin 2x = -\sin x (1 + 2 \cos x) \,.$$

Auf dem gesamten Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ gilt $\cos x \geq 0$. Die Funnktion f' hat auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ nur eine einzige Nullstelle $x = 0$. Wir müssen die Stelle $x = 0$ und die Ränder des Intervalls $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ untersuchen: $f(0) = \frac{3}{2}$, $f(-\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2}$. Das Maximum von f ist folglich $\frac{3}{2}$, das Minimum ist $-\frac{1}{2}$.

b) **(5 Punkte)** Um zu zeigen, dass

$$\left| \ln(\cos x) - \ln(\cos y) \right| \leqslant \sqrt{3} \, |x - y|$$

für alle $x, y \in [-\pi/3, \pi/3]$ gilt, betrachten wir die Funktion $f \colon [-\pi/3, \pi/3] \to \mathbb{R}, \; t \mapsto \ln(\cos t)$. Diese ist auf $[-\pi/3, \pi/3]$ stetig differenzierbar mit $f'(t) = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\tan t$. Da $\tan$ auf $[-\pi/3, \pi/3]$ streng monoton wachsend ist und $\tan(-\pi/3) = -\sqrt{3}$ sowie $\tan(\pi/3) = \sqrt{3}$ gelten, ergibt sich

$$\left| f'(t) \right| \leqslant \sqrt{3} \qquad \text{für alle } t \in [-\pi/3, \pi/3] \,.$$

Sind $x, y \in [-\pi/3, \pi/3]$, so finden wir nach dem Mittelwertsatz ein ξ zwischen x und y mit

$$f(x) - f(y) = f'(\xi) \, (x - y) \,.$$

Es folgt

$$\left| f(x) - f(y) \right| = \left| f'(\xi) \right| |x - y| \leqslant \sqrt{3} \, |x - y| \,.$$

Aufgabe 3

a) **i)** **(2 Punkte)** Mit Hilfe von partieller Integration erhält man

$$\int_0^{\sqrt{2}} x^3 e^{x^2}\,dx = \int_0^{\sqrt{2}} x^2\cdot\left(xe^{x^2}\right)dx = \left[x^2\cdot\left(\tfrac12 e^{x^2}\right)\right]_0^{\sqrt{2}} - \int_0^{\sqrt{2}} 2x\cdot\left(\tfrac12 e^{x^2}\right)dx$$
$$= \tfrac22 e^2 - \int_0^{\sqrt{2}} xe^{x^2}\,dx = e^2 - \left[\tfrac12 e^{x^2}\right]_0^{\sqrt{2}}$$
$$= e^2 - \tfrac12 e^2 + \tfrac12 = \tfrac12 e^2 + \tfrac12\,.$$

ii) **(2 Punkte)** Da eine Stammfunktion von $x \mapsto \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ durch $x \mapsto \ln(\cosh(x))$ gegeben ist, gilt

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\,dx = \Big[\ln(\cosh(x))\Big]_{-2\pi}^{2\pi} = \ln(\cosh(2\pi)) - \ln(\cosh(-2\pi))$$
$$= \ln(\cosh(2\pi)) - \ln(\cosh(2\pi)) = 0\,.$$

b) **(2 Punkte)** Seien $m, n \in \mathbb{N}$ beliebig. Die Substitution $y = 1-x$, $dy = (-1)\,dx$ führt auf

$$\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx = \int_{1-0}^{1-1} (1-y)^n y^m\,(-1)\,dy = \int_0^1 y^m(1-y)^n\,dy\,.$$

c) **(4 Punkte)** Zu zeigen ist, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,dx$$

konvergent ist und dass sein Wert in $[0,2]$ liegt.

Zunächst beachten wir $\frac{\sin x}{x} \to 1$ für $x \to 0+$. Daraus ergibt sich $\frac{\sin^2(x)}{x^2} \to 1$ für $x \to 0+$, weshalb das Integral bei 0 nicht uneigentlich ist. Für alle $x \in (0,1]$ gilt wegen $|\sin(x)| \leqslant x$

$$0 \leqslant \frac{\sin^2(x)}{x^2} \leqslant 1\,,$$

woraus

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,dx \leqslant \int_0^1 1\,dx = 1$$

folgt. Da $0 \leqslant \frac{\sin^2(x)}{x^2} \leqslant \frac{1}{x^2}$ für alle $x \geqslant 1$ gilt und das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_1^R \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^R = \lim_{R\to\infty} -\frac{1}{R} + 1 = 1$$

konvergent ist, konvergiert $\int_1^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,dx$ nach dem Majorantenkriterium und es gilt

$$0 \leqslant \int_1^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,dx \leqslant \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1\,.$$

Zusammen erhalten wir, dass $\int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,dx$ konvergiert und dass für den Wert gilt

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,dx}_{\in[0,1]} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2}}_{\in[0,1]} \in [0,2]\,.$$

Aufgabe 4

a) **(4 Punkte)** Um den Real- und Imaginärteil von $z := \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i\right)^9$ zu ermitteln, bestimmen wir zunächst die Polarkoordinaten von $y := \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i$. Die Länge dieser Zahl beträgt

$$|y| = \sqrt{3/4 + 1/4} = 1\,.$$

Für das Argument $\varphi \in (-\pi, \pi]$ von y muss gelten

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi\,, \qquad \text{also} \qquad \cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{und} \quad \sin\varphi = \frac{1}{2}\,.$$

Dies ist genau für $\varphi = \frac{1}{6}\pi$ erfüllt. Also gilt $y = e^{i\pi/6}$ und es folgt

$$z = y^9 = e^{i3\pi/2} = -i\,.$$

Damit lauten $\mathrm{Re}(z) = 0$, $\mathrm{Im}(z) = -1$.

b) **(6 Punkte)** Um

$$\ln(n+1) = \sum_{k=1}^{n} \ln\bigl(1 + 1/k\bigr) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

zu zeigen, verwenden wir vollständige Induktion.
IA: $n = 1$. Es ist $\ln(1+1) = \sum_{k=1}^{1} \ln(1 + 1/k)$.
IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Es gelte $\ln(n+1) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + 1/k)$ (IV). Dann folgt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \ln(1 + 1/k) &= \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + 1/k) + \ln\bigl(1 + 1/(n+1)\bigr) \overset{\text{(IV)}}{=} \ln(n+1) + \ln\bigl(1 + 1/(n+1)\bigr) \\ &= \ln\bigl((n+1)\cdot(1 + 1/(n+1))\bigr) = \ln\bigl((n+1)+1\bigr)\,.\end{aligned}$$