

1a) Sei $z_1 = \sqrt{3} - i$. Dann $|z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = 2$. (0,5)

Also $z_1 = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)i \right) = 2e^{i\varphi}$

wobei $\varphi = \arctan \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \arctan \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
 $\downarrow$
 Da $\frac{\sqrt{3}}{2} > 0$ $= -\frac{\pi}{6}$ (1)

Also $z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{6}} \Rightarrow z^{50} = 2^{50} e^{-i\frac{50\pi}{6}}$
 Aber $e^{-i\frac{50\pi}{6}} = \underbrace{e^{-i10\pi}}_{=1} e^{i\frac{10\pi}{6}} = e^{i\frac{5\pi}{3}}$ (1) $\Rightarrow$

$z_1^{50} = 2^{50} e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2^{50} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) \right) \Rightarrow$

$(\sqrt{3} - i)^{50} = 2^{50} \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ (1) Also

$\operatorname{Re} (\sqrt{3} - i)^{50} = 2^{49}$ $\operatorname{Im} (\sqrt{3} - i)^{50} = -\sqrt{3} 2^{49}$ (0,5)

1b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\sin(x)-1)}{\ln(x - \frac{\pi}{2} + 1)} = \frac{0}{0}$ da $\sin(\sin(\frac{\pi}{2})-1) = \sin(1-1) = \sin 0 = 0$
 und $\ln(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 1) = \ln 1 = 0$

Aber $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\sin(\sin(x)-1))'}{(\ln(x - \frac{\pi}{2} + 1))'} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\sin(x)-1) \cos(x)}{\frac{1}{x - \frac{\pi}{2} + 1}}$ (1)

$$= \frac{\cos\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-1\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{1}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 1}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Also nach l'Hospital $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\sin(x)-1)}{\ln(x-\frac{\pi}{2}+1)} = 0$. (1)

(1c). Für $n=1$ $\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3}$ und

$$\sum_{k=1}^1 \frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{3} \quad \text{Also stimmt die}$$

Aussage für $n=1$. (0,5)

Induktionsannahme: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad (*)$$

z.z. $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+2)(n+3)}$ (1) In der Tat

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+1)(k+2)} + \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)} \quad (*) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)} \quad (1) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\overbrace{- (n+3) + 2}^{= -(n+1)}}{(n+1)(n+2)(n+3)} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+2)(n+3)} \quad (0,5) \quad \text{was zu zeigen war. Also stimmt die}$$

Aussage $\forall n \in \mathbb{N}$. Da $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$ (1)

Gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}$. Also ist die Reihe konvergent und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}$.

$$2a) (i) f(x) = \sin(\cos(x)) \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \sin(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos(\cos(x)) (\cos(x))' = -\cos(\cos(x)) \sin(x)$$

$$\text{Also } f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -(\cos(0)) \cdot 1 = -1 \quad (1)$$

$$\text{Also } T_1\left(f; \frac{\pi}{2}\right)(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \quad (1)$$

$$(ii) \left| \sin(\cos(x)) - T_1\left(f; \frac{\pi}{2}\right)(x) \right| = \underbrace{\left| R_1\left(f; \frac{\pi}{2}\right)(x) \right|}_{\text{Restglied}} = |f''(c)| \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{2!} \quad (1)$$

$\downarrow$
 c zwischen $x, \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Aber } f''(x) &= -\cos(\cos(x)) (\sin(x))' - (\cos(\cos(x)))' \sin(x) \\ &= -\cos(\cos(x)) \cos(x) + \sin(\cos(x)) (-\sin^2(x)) \end{aligned} \quad (1)$$

Dreiecksungleichung.

Da $(\cos x)' = -\sin x$

$$\text{Also } |f''(c)| \leq |\cos(\cos(c)) \cos(c)| + |\sin(\cos(c)) \sin^2(c)|$$

$$\leq 1 + 1 = 2 \quad (2)$$

Da $|\sin x|, |\cos x| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Aus (1), (2) bekommen wir

$$\left| \sin(\cos(x)) - T_1\left(f; \frac{\pi}{2}\right)(x) \right| \leq \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

2b) Es gilt.
$$\sqrt[n]{\left(\frac{2+3(-1)^n}{4}\right)^n (x+3)^{2n}} = \left|\frac{2+3(-1)^n}{4}\right| (x+3)^2$$

$$= \begin{cases} \frac{5}{4} (x+3)^2, & n \text{ gerade} \\ \frac{1}{4} (x+3)^2, & n \text{ ungerade.} \end{cases} \quad (1)$$

größte Häufungswert

Also $\limsup \sqrt[n]{\left(\frac{2+3(-1)^n}{4}\right)^n (x+3)^{2n}} = \frac{5}{4} (x+3)^2$

Deshalb nach Wurzelkriterium $\frac{5}{4} (x+3)^2 > 1$
 $\Rightarrow$ divergiert die Reihe und $\frac{5}{4} (x+3)^2 < 1 \Rightarrow$
 konvergiert die Reihe.

Wenn $\frac{5}{4} (x+3)^2 = 1$ dann aus (1) folgt

$$\left(\frac{2+3(-1)^n}{4}\right)^n (x+3)^{2n} = \begin{cases} 1 & n \text{ gerade} \\ \left(\frac{1}{5}\right)^n & n \text{ ungerade.} \end{cases} \rightarrow 0$$

und da die Folge der Terme nicht gegen 0 konvergiert divergiert die Reihe.

Insgesamt ist die Reihe konvergent
 $\Leftrightarrow \frac{5}{4} (x+3)^2 < 1 \Leftrightarrow |x+3| < \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

3a) Da $f(x) = (x-b)^2$ für $x \leq 1$ bekommen wir
 $f(1) = (1-b)^2 = \lim_{x \rightarrow 1-} (x-b)^2$ und

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \left. \left((x-b)^2 \right)' \right|_{x=1} = 2(1-b).$$

Also ist f differenzierbar in 1 wenn

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = (1-b)^2 \\ \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = 2(1-b) \end{array} \right. \stackrel{\textcircled{1}}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} a = (1-b)^2 \\ \text{und} \\ \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{ax - (1-b)^2}{x-1} = 2(1-b) \end{array} \right.$$

$$\stackrel{(\Rightarrow)}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} a = (1-b)^2 \\ \text{und} \\ \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(1-b)^2 x - (1-b)^2}{x-1} = 2(1-b) \end{array} \right. \stackrel{(\Rightarrow)}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} a = (1-b)^2 \\ (1-b)^2 = 2(1-b) \end{array} \right. \stackrel{\textcircled{1}}{(\Rightarrow)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = (1-b)^2 \\ (1-b)(1-b-2) = 0 \end{array} \right. \stackrel{(\Rightarrow)}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} a = (1-b)^2 \\ (b=1) \vee (b=-1) \end{array} \right. \stackrel{(\Rightarrow)}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} b=1 \text{ und } a=0 \\ \text{oder} \\ b=-1 \text{ und } a=4 \end{array} \right. \stackrel{\textcircled{1}}{(\Rightarrow)}$$

(3b) Es gilt $f'(x) = \frac{1}{2x+1} (2x+1)' - 2 = \frac{2}{2x+1} - 2 \stackrel{\textcircled{1}}{}$

Also $f'(0) = 0$. Ferner

$$f''(x) = -\frac{2(2x+1)'}{(2x+1)^2} - (2)' = -\frac{4}{(2x+1)^2} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (f \text{ konvex}) \Rightarrow$$

f hat Globales Maximum in 0. $\stackrel{\textcircled{1}}{}$ Also $f(x) \leq f(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \ln(1+2x) - 2x \leq \underbrace{\ln(1+0) - 2}_{=0} \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \ln(1+2x) \leq 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Da aber $\ln(1+2x) \leq 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ können wir x durch $\frac{x}{2}$ ersetzen zu bekommen $\ln(1+x) \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3d (i) $\int_0^1 x^4 \cos(1-x^5) dx - \frac{dy}{5} = \int_1^0 \cos u \left(-\frac{dy}{5}\right)$

$$\begin{aligned} u(x) &= 1-x^5 \\ du &= (1-x^5)' dx = -5x^4 dx \\ \Rightarrow x^4 dx &= -\frac{du}{5} \\ u(0) &= 1, u(1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \frac{\cos u}{5} du = \\ &= \frac{\sin u}{5} \Big|_0^1 = \frac{\sin 1}{5} \\ &\quad (\text{da } \sin 0 = 0). \end{aligned}$$

(ii) $\int_1^e 3x^2 \ln(x) dx = \int_1^e (x^3)' \ln(x) dx$

$$= \underbrace{x^3 \ln(x)}_1 \Big|_1^e - \underbrace{\int_1^e x^3 (\ln(x))' dx}_1$$

$$\underbrace{e^3 \ln(e)}_{=1} - \underbrace{1^3 \ln(1)}_{=0} = e^3$$

$$\int_1^e x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^e = \frac{e^3 - 1}{3}$$

Also $\int_1^e 3x^2 \ln(x) dx = e^3 - \frac{e^3 - 1}{3} = \frac{2e^3 - 1}{3}$

$$4a) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} z_2 \rightarrow z_2 - z_1 \\ z_3 \rightarrow z_3 - 2z_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} z_1 \rightarrow z_1 - 2z_2 \\ z_3 \rightarrow \frac{1}{2} z_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \begin{array}{l} z_1 \rightarrow z_1 - z_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \begin{array}{l} 1 \end{array} \text{ Also}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Da B invertierbar ist

$$\text{Kern } B = \{\vec{0}\}, \text{ weil } B\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow B^{-1}(B\vec{x}) = \vec{0} \Rightarrow$$

$$(B^{-1}B)\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$$

$$(4b) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 5 & a \end{array} \right) \begin{array}{l} z_2 \rightarrow z_2 - z_1 \\ z_3 \rightarrow z_3 - 2z_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & a-2 \end{array} \right) \begin{array}{l} z_1 \rightarrow z_1 - 2z_2 \\ z_3 \rightarrow z_3 - 3z_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-5 \end{array} \right) \quad (1) \quad \text{Da die Matrix der}$$

Koeffizienten in Zeilennormalform ist, folgt, dass das System lösbar ist

wenn $a-5=0$. (2) In diesem Fall lautet

das System
$$\begin{cases} x_1 - x_3 = -1 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \quad (1) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 + x_3 \\ x_2 = 1 - x_3 \end{cases} \quad (1)$$

Wir lassen x_3 frei variieren und bekommen mit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + x_3 \\ 1 - x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Also}$$

ist die Menge der Lösungen.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (1)$$

Alternativ: Mit dem -1 Ergänzungstrick sieht man, dass $\text{lin} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Kern von A ist und da man sieht, dass $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Lösung (2) von (1) ist ist $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die Menge aller Lösungen