Karlsruhe Institut für Technologie (KIT) | WS 2017/18
Institut für Analysis | 27.01.2018
Prof. Dr. W. Reichel

**Übungsklausur**

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik**

**Lösungsvorschläge**

## Aufgabe 1

**a)** **i)** **(2 Punkte)** Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+4n}-\sqrt{n^2+10}\,\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{4n-10}{\sqrt{n^2+4n}+\sqrt{n^2+10}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{2n} = 2\,.$$

**ii)** **(3 Punkte)** Wegen

$$\lim_{x\to 1-} \tan(\frac{\pi}{2}x)\cdot \ln x = \lim_{x\to 1-} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}x)}{\cos(\frac{\pi}{2}x)}\cdot \ln x = 1\cdot \lim_{x\to 1-} \frac{\ln x}{\cos(\frac{\pi}{2}x)}$$

gilt nach der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{x\to 1-} \tan(\frac{\pi}{2}x)\cdot \ln x = \lim_{x\to 1-} \frac{\frac{1}{x}}{-\sin(\frac{\pi}{2}x)\cdot\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$$

**iii)** **(1 Punkt)** Wegen $\lim_{x\to 0}\sin(\cos x) = \sin(\cos 0) \neq 0$ ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(\cos x)} = \frac{0}{\sin(\cos 0)} = 0\,.$$

**b)** **(4 Punkte)**

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{(n+2)}}{n-1}} = 2\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{4}{n-1}} = 2$$

Der Konvergenzradius ist $\frac{1}{2}$.
Wir untersuchen nun die Konvergenz der Reihe in den Punkten $x=\frac{1}{2}$ und $x=-\frac{1}{2}$.
Für $x=-\frac{1}{2}$ gilt

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{n+2}}{(n-1)}x^n = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{2n-1}\frac{4}{(n-1)} = -\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4}{(n-1)} = -4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}.$$

.

Das ist die harmonische Reihe, die divergent ist.
Für $x=\frac{1}{2}$ bekommen wir eine alternierende Reihe $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{4}{(n-1)}$, die nach dem Leibnizkriterium konvergent ist.
**Fazit:** Die Menge aller Punkte $x\in\mathbb{R}$, in denen die Reihe konvergiert, ist $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

## Aufgabe 2

**a)** **i)** **(3 Punkte)** Die durch $f(x) := e^{3x} + \arctan(x)$ definierte Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(x) = 3e^{3x} + \frac{1}{1+x^2} > 0\,.$$

Also ist $f$ streng monoton wachsend und damit injektiv. Wegen $f(x) > -\frac{\pi}{2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ sowie der Stetigkeit von $f$ folgt aus dem Zwischenwertsatz: $f(\mathbb{R}) = (-\frac{\pi}{2}, \infty)$. Damit besitzt die bijektive Funktion $f\colon \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \infty)$ die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon (-\frac{\pi}{2}, \infty) \to \mathbb{R}$.

**ii)** **(2 Punkte)** Wegen $f(0) = 1$ ist $f^{-1}(1) = 0$. Da $f'(0) = 4 \neq 0$ ist $f^{-1}$ nach dem Satz über die Umkehrfunktion in $f(0) = 1$ differenzierbar und es gilt

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{4}\,.$$

**b)** **(5 Punkte)** Um zu zeigen, dass

$$\big|\ln(\cos x) - \ln(\cos y)\big| \leqslant \sqrt{3}\,|x-y|$$

für alle $x, y \in [-\pi/3, \pi/3]$ gilt, betrachten wir die Funktion $f\colon [-\pi/3, \pi/3] \to \mathbb{R},\ t \mapsto \ln(\cos t)$. Diese ist auf $[-\pi/3, \pi/3]$ stetig differenzierbar mit $f'(t) = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\tan t$. Da tan auf $[-\pi/3, \pi/3]$ streng monoton wachsend ist und $\tan(-\pi/3) = -\sqrt{3}$ sowie $\tan(\pi/3) = \sqrt{3}$ gelten, ergibt sich

$$\big|f'(t)\big| \leqslant \sqrt{3} \qquad \text{für alle } t \in [-\pi/3, \pi/3]\,.$$

Sind $x, y \in [-\pi/3, \pi/3]$, so finden wir nach dem Mittelwertsatz ein $\xi$ zwischen $x$ und $y$ mit

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)\,(x-y)\,.$$

Es folgt

$$\big|f(x) - f(y)\big| = \big|f'(\xi)\big|\,|x-y| \leqslant \sqrt{3}\,|x-y|\,.$$

## Aufgabe 3

**a)** **i)** **(2 Punkte)** Mit Hilfe von partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{2}} x^3 e^{-x^2}\,dx &= \int_0^{\sqrt{2}} x^2 \cdot \big(xe^{-x^2}\big)\,dx = \Big[x^2 \cdot \big(-\tfrac{1}{2}e^{-x^2}\big)\Big]_0^{\sqrt{2}} - \int_0^{\sqrt{2}} 2x \cdot \big(-\tfrac{1}{2}e^{-x^2}\big)\,dx \\ &= -\tfrac{2}{2}e^{-2} + \int_0^{\sqrt{2}} xe^{-x^2}\,dx = -e^{-2} + \Big[-\tfrac{1}{2}e^{-x^2}\Big]_0^{\sqrt{2}} \\ &= -e^{-2} - \tfrac{1}{2}e^{-2} + \tfrac{1}{2} = -\tfrac{3}{2}e^{-2} + \tfrac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

**ii)** **(2 Punkte)** Es gilt nach der Substitution $y = \cos x$

$$\int_0^{\pi} \sin^3(x)\,dx = \int_0^{\pi} \sin^2(x)\sin x\,dx = \int_0^{\pi} (1-\cos^2(x))\sin x\,dx = \int_1^{-1} (-1)(1-y^2)\,dy = \Big[\frac{y^3}{3} - y\Big]_1^{-1} = \frac{4}{3}$$

**b)** **(2 Punkte)** Seien $m, n \in \mathbb{N}$ beliebig. Die Substitution $y = 1-x$, $dy = (-1)\,dx$ führt auf

$$\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx = \int_{1-0}^{1-1} (1-y)^n y^m\,(-1)\,dy = \int_0^1 y^m(1-y)^n\,dy\,.$$

**c) (4 Punkte)**

Da $0 \leqslant \frac{\sin^2(x)}{x^2} \leqslant \frac{1}{x^2}$ für alle $x \geqslant 1$ gilt und das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^R = \lim_{R\to\infty} -\frac{1}{R} + 1 = 1$$

konvergent ist, konvergiert $\int_1^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,dx$ nach dem Majorantenkriterium und es gilt

$$0 \leqslant \int_1^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,dx \leqslant \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1\,.$$

## Aufgabe 4

**a) (4 Punkte)**

**b)** Die Funktion $f$ ist auf dem Intervall [-3,3] differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = e^x(x^2+x-11) + e^x(2x+1) = e^x(x^2+3x-10) = e^x(x+5)(x-2).$$

Die Ableitung der Funktion $f$ hat innerhalb des Intervalls $(-3,3)$ nur eine Nullstelle $x=2$.
Der Punkt $x=-5$ liegt nicht auf dem Intervall $[-3,3]$.
Wir berechnen die Werte von $f$ an den Stellen $x=-3,\ x=2,\ x=3$ und bekommen, dass $f_{\max} = f(3) = e^3$ und $f_{\min} = f(2) = -5e^2$ .

**c) (2 Punkte)** Um den Real- und Imaginärteil von $z := \big(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i\big)^9$ zu ermitteln, bestimmen wir zunächst die Polarkoordinaten von $y := \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i$. Die Länge dieser Zahl beträgt

$$|y| = \sqrt{3/4 + 1/4} = 1\,.$$

Für das Argument $\varphi \in (-\pi,\pi]$ von $y$ muss gelten

$$\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2}\,i = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi\,, \qquad \text{also} \qquad \cos\varphi = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{und} \quad \sin\varphi = \tfrac{1}{2}\,.$$

Dies ist genau für $\varphi = \frac{1}{6}\pi$ erfüllt. Also gilt $y = e^{i\pi/6}$ und es folgt

$$z = y^9 = e^{i3\pi/2} = -i\,.$$

Damit lauten $\mathrm{Re}(z) = 0$, $\mathrm{Im}(z) = -1$.

**d) (4 Punkte)** Um

$$\ln(n+1) = \sum_{k=1}^n \ln\big(1+1/k\big) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

zu zeigen, verwenden wir vollständige Induktion.

IA: $n=1$. Es ist $\ln(1+1) = \sum_{k=1}^1 \ln(1+1/k)$.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Es gelte $\ln(n+1) = \sum_{k=1}^n \ln(1+1/k)$ (IV). Dann folgt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \ln(1+1/k) &= \sum_{k=1}^{n} \ln(1+1/k) + \ln\big(1+1/(n+1)\big) \overset{\text{(IV)}}{=} \ln(n+1) + \ln\big(1+1/(n+1)\big)\\ &= \ln\big((n+1)\cdot(1+1/(n+1))\big) = \ln\big((n+1)+1\big)\,.\end{aligned}$$