Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski

WS 2009/10
30.01.2010

Übungsklausur

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen und Geodäsie

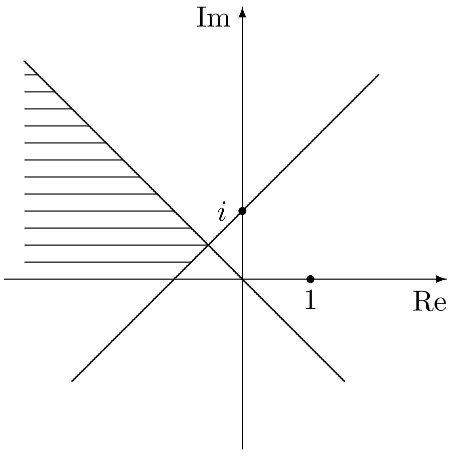
Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

a) **(2 Punkte)** Durch $\mathrm{Re}(z+3i) < \mathrm{Im}(z)$ bzw. $\mathrm{Re}(z) < \mathrm{Im}(z)$ wird der Teil der komplexen Zahlenebene charakterisiert, der oberhalb der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten liegt. Daher wird durch $\mathrm{Re}(z+3i) < \mathrm{Im}(z) - 1$ der Teil der komplexen Zahlenebene charakterisiert, der oberhalb der um 1 nach oben verschobenen Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten liegt.

Der Bedingung $\frac{3\pi}{4} < \arg(z) < \pi$ genügen genau die komplexen Zahlen, die im 2. Quadranten (echt) zwischen der Winkelhalbierenden des 2. und 4. Quadranten und der rellen Achse liegen.

Insgesamt ergibt sich: A ist der in der folgenden Skizze schraffierte Bereich, wobei der Rand der schraffierten Fläche nicht dazugehört.



b) **(4 Punkte)** Wir stellen $z \in \mathbb{C}$ in der Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar. Dann gilt

$$z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + 2xyi + i^2y^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy),$$

und die zwei gegebenen Gleichungen lassen sich somit schreiben als

$$x^2 - y^2 = 2 \qquad \text{und} \qquad 2xy = -4y.$$

1. Fall: $y = 0$. Dann ist die zweite Gleichung stets erfüllt und die erste lautet $x^2 = 2$. Dies bedeutet: $x = \sqrt{2}$ oder $x = -\sqrt{2}$.

2. Fall: $y \neq 0$. Dividiert man die zweite Gleichung durch y, so folgt $2x = -4$, also $x = -2$. Die erste Gleichung lautet dann $(-2)^2 - y^2 = 2$, also $y^2 = 2$. Dies bedeutet: $y = \sqrt{2}$ oder $y = -\sqrt{2}$.

Somit erfüllt $z \in \mathbb{C}$ genau dann die Gleichungen, wenn $z \in \left\{\sqrt{2},\ -\sqrt{2},\ -2+i\sqrt{2},\ -2-i\sqrt{2}\right\}$.

Nur die Lösung $-2+i\sqrt{2}$ liegt in der Menge A.

c) (4 Punkte) Nach einer Indexverschiebung erhält man mit Hilfe der geometrischen Summenformel

$$\sum_{k=2}^{13}(1+i)^k = (1+i)^2\sum_{l=0}^{11}(1+i)^l = (1+2i-1)\,\frac{1-(1+i)^{12}}{1-(1+i)} = -2\big(1-(1+i)^{12}\big)\,.$$

Wegen $|1+i| = \sqrt{2}$ und $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$ ist $1+i = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$. Damit ergibt sich

$$\sum_{k=2}^{13}(1+i)^k = -2\big(1-(\sqrt{2}\,e^{i\pi/4})^{12}\big) = -2\big(1-2^6\,e^{3i\pi}\big) = -2\big(1-64\cdot(-1)\big) = -130\,.$$

Also ist

$$\operatorname{Re}\sum_{k=2}^{13}(1+i)^k = -130 \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Im}\sum_{k=2}^{13}(1+i)^k = 0\,.$$

Aufgabe 2

a) (2 Punkte) 1. Beh.: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $2^{n-1} \leqslant n!$. Beweis durch vollständige Induktion:

IA: Für $n = 1$ ist $2^{n-1} = 2^0 = 1 \leqslant 1! = n!$ erfüllt.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gelte $2^{n-1} \leqslant n!$ (IV). Dann folgt

$$2^n = 2\cdot 2^{n-1} \overset{\text{(IV)}}{\leqslant} 2\cdot n! \leqslant (n+1)\cdot n! = (n+1)!\,.$$

(3 Punkte) 2. Beh.: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n! \leqslant 2^{\frac{(n-1)n}{2}}$. Beweis durch vollständige Induktion:

IA: Für $n = 1$ ist $n! = 1 \leqslant 2^0 = 2^{\frac{(n-1)n}{2}}$ erfüllt.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gelte $n! \leqslant 2^{\frac{(n-1)n}{2}}$ (IV). Dann folgt

$$(n+1)! = n!\cdot(n+1) \overset{\text{(IV)}}{\leqslant} 2^{\frac{(n-1)n}{2}}\cdot(n+1) \overset{(*)}{\leqslant} 2^{\frac{(n-1)n}{2}}\cdot 2^n = 2^{\frac{n(n-1)}{2}+n} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}} = 2^{\frac{((n+1)-1)(n+1)}{2}}\,.$$

Die Ungleichung $n+1 \leqslant 2^n$ in $(*)$ kann man induktiv zeigen oder auch mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes einsehen:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \geqslant \sum_{k=0}^{1}\binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} = 1+n\,.$$

b) i) (2 Punkte) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n = \frac{\sqrt{n}+1}{(3\sqrt[4]{n}+4\sqrt[5]{n})^2} = \frac{\sqrt{n}+1}{(\sqrt[4]{n}\,(3+4n^{\frac{1}{5}-\frac{1}{4}}))^2} = \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}\,(3+4n^{-\frac{1}{20}})^2} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}{(3+\frac{4}{\sqrt[20]{n}})^2}\,.$$

Wegen $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{\sqrt{n}}) = 1$ und $\lim_{n\to\infty}(3+\frac{4}{\sqrt[20]{n}}) = 3 \neq 0$ konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach den Grenzwertsätzen gegen $\frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.

ii) (3 Punkte) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$2 = \sqrt[n]{2^n} \leqslant a_n \overset{(*)}{\leqslant} \sqrt[n]{2^n+2^n} = \sqrt[n]{2\cdot 2^n} = \sqrt[n]{2}\cdot 2\,.$$

Wegen $\sqrt[n]{2} \to 1$ $(n \to \infty)$ folgt $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

Es verbleibt die Abschätzung $n \leqslant 2^n$, $n \in \mathbb{N}$, in $(*)$ zu begründen: Diese ergibt sich z.B. unter Verwendung des binomischen Lehrsatzes aus

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \geqslant \binom{n}{1} = n\,.$$

Aufgabe 3

a) (7 Punkte) Ist für $n \in \mathbb{N}$

$$a_n := \frac{1}{\sqrt[4]{(n+1)\,2^{4n}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}} \cdot \frac{1}{2^n}$$

gesetzt, so gilt

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[4]{\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}} \cdot \frac{1}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt[4]{\frac{1}{1}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,,$$

denn $1 \leftarrow \sqrt[n]{n} \leqslant \sqrt[n]{n+1} \leqslant \sqrt[n]{n+n} = \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n} \to 1 \cdot 1 = 1$ für $n \to \infty$.

Der Konvergenzradius R der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x+3)^n$ beträgt also $R = 2$. Deshalb ist diese Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x+3| < 2$, d.h. für $-5 < x < -1$, konvergent und für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x+3| > 2$ divergent, d.h. für $x < -5$ oder $x > -1$. Zu untersuchen verbleibt der Fall $x \in \mathbb{R}$ mit $|x+3| = 2$, also $x = -5$ oder $x = -1$:

Für $x = -5$ ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}} \cdot \frac{1}{2^n}\,(-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}}\,(-1)^n\,.$$

Wegen $\frac{1}{\sqrt[4]{n+1}} \to 0$ für $n \to \infty$ und $n+1 \leqslant n+2 \Rightarrow \frac{1}{n+2} \leqslant \frac{1}{n+1} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{n+2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}}$ ist $(\frac{1}{\sqrt[4]{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge. Deshalb konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}}\,(-1)^n$ nach dem Leibnizkriterium.

Im Fall $x = -1$ ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}} \cdot \frac{1}{2^n}\,2^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}}$$

divergent, weil die harmonische Reihe wegen $\frac{1}{\sqrt[4]{n+1}} \geqslant \frac{1}{n+1}$ eine divergente Minorante ist.

Fazit: Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{(n+1)\,2^{4n}}}\,(x+3)^n$ konvergiert genau für $x \in [-5,-1)$.

Da die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{(n+1)\,2^{4n}}}\,(x+3)^n$ den Konvergenzradius 2 besitzt, liegt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x+3| < 2$, d.h. $-5 < x < -1$, absolute Konvergenz vor. Wie obiger Untersuchung zu entnehmen ist, ist die gegebene Potenzreihe für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x+3| = 2$ nicht absolut konvergent. Da $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{(n+1)\,2^{4n}}}\,(x+3)^n$ für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x+3| > 2$ divergiert, liegt für solche x keine absolute Konvergenz vor.

Fazit: Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{(n+1)\,2^{4n}}}\,(x+3)^n$ ist genau für $|x+3| < 2$, d.h. $x \in (-5,-1)$, absolut konvergent.

b) (3 Punkte) Wegen

$$\frac{\frac{k!}{k^k}}{\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}} = \frac{k!}{k^k} \cdot \frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{k!}{(k+1)!} \cdot \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k} = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}$$

$$= \frac{(k+1)^k}{k^k} = \Big(\frac{k+1}{k}\Big)^k = \Big(1 + \frac{1}{k}\Big)^k \xrightarrow{k\to\infty} e$$

ist der Konvergenzradius der Potenzreihe e.

Aufgabe 4

a) **(7 Punkte)** Auf $(0,\infty)$ ist f als Komposition differenzierbarer Funktionen differenzierbar und für jedes $x>0$ ergibt sich

$$f'(x)=\frac{3}{2}\,x^{1/2}\,e^{-1/x}+x^{3/2}\,e^{-1/x}\,\frac{-1}{x^2}\,(-1)=e^{-1/x}\,\sqrt{x}\,\Big(\frac{3}{2}+\frac{1}{x}\Big)\,.$$

Wegen $f(x)=0$ für jedes $x<0$ ist f auf $(-\infty,0)$ differenzierbar mit $f'(x)=0$ für alle $x\in\mathbb{R}$.

Aufgrund von

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{x^{3/2}\,e^{-1/x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0+}x^{1/2}\,e^{-1/x}=0\cdot 0=0$$

und

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{0-0}{x-0}=0$$

existiert $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$. Daher ist f in 0 differenzierbar und es gilt $f'(0)=0$.

Fazit: f ist auf $D=\mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$f'(x)=\begin{cases} e^{-1/x}\,\sqrt{x}\,\big(\frac{3}{2}+\frac{1}{x}\big) & \text{für } x>0\,,\\ 0 & \text{für } x\leqslant 0\,.\end{cases}$$

Auf $(0,\infty)$ ist f' als Komposition stetiger Funktionen stetig. Auch auf $(-\infty,0)$ ist f' stetig.

Untersuchung von f' auf Stetigkeit in 0: Für jedes $x>0$ gilt

$$\begin{aligned}\Big|\frac{e^{-1/x}}{\sqrt{x}}\Big| &= \frac{1}{e^{1/x}\cdot\sqrt{x}}=\frac{1}{(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2!}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3!}\frac{1}{x^3}+\dots)\sqrt{x}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{2!}\frac{1}{x^{3/2}}+\frac{1}{3!}\frac{1}{x^{5/2}}+\dots}\leqslant\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\sqrt{x}\xrightarrow{x\to 0+}0\,.\end{aligned}$$

Also ist $\lim_{x\to 0+}\frac{e^{-1/x}}{\sqrt{x}}=0$ und somit $\lim_{x\to 0+}f'(x)=\lim_{x\to 0+}(\frac{3}{2}e^{-1/x}\sqrt{x}+\frac{e^{-1/x}}{\sqrt{x}})=0+0=0$. Da überdies $\lim_{x\to 0-}f'(x)=\lim_{x\to 0-}0=0$ gilt, folgt $\lim_{x\to 0}f'(x)=0=f'(0)$, d.h. die Stetigkeit von f' in 0.

Fazit: f' ist stetig auf $\mathbb{R}$.

b) **(3 Punkte)** Beh.: $f(\mathbb{R})=[0,\infty)$.

"$\supset$": Sei $y\in[0,\infty)$ beliebig. Wegen $x^{3/2}\to\infty$ und $e^{-1/x}\to e^0=1$ für $x\to\infty$ ist $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$. Deshalb existiert ein $x_1\in\mathbb{R}$ mit $f(x_1)\geqslant y$. Außerdem gilt $f(0)=0$. Infolgedessen liegt y zwischen $f(0)$ und $f(x_1)$. Da f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, ist f auf $\mathbb{R}$ stetig. Somit gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $x_0\in\mathbb{R}$ mit $f(x_0)=y$, also $y\in f(\mathbb{R})$. Da $y\in[0,\infty)$ beliebig war, folgt $[0,\infty)\subset f(\mathbb{R})$.

"$\subset$": Wegen $f(x)\geqslant 0$ für alle $x\in\mathbb{R}$ ist die Inklusion $f(\mathbb{R})\subset[0,\infty)$ erfüllt.