Komplexe Zahlen

Deg	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
Rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

- **Normalform:**

  $z = a + ib$

- **Argument:**

  1.) $\cos(\varphi) = \frac{a}{|z|}$

  2.) $\sin(\varphi) = \frac{b}{|z|}$

  3.) $\tan(\varphi) = \frac{b}{a}$

- **Polarform:**

  $z = |z| \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$

  $z^n = |z|^n (\cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi))$

- **Eulerform:**

  $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$

  $z^n = |z|^n \cdot e^{i \cdot n \cdot \varphi}$

- $z^n = a + bi$:

  $\rightarrow z^n = r \cdot e^{i\varphi}$

  $\hookrightarrow z_k = r^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i\left(\frac{2\pi \cdot k + \varphi}{n}\right)}$

  für $k = (0, 1, \dots, (n-1))$

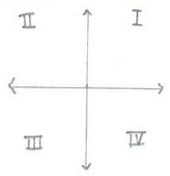
- **Argument / Quadrant:**

  I: $\varphi = \varphi$

  II: $\varphi = \pi - |\varphi|$

  III: $\varphi = \pi + |\varphi|$

  IV: $\varphi = 2\pi - |\varphi|$



- **Binomialkoeffizient**

  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

- **Dreiecksungleichung**

  1.) $|a+b| \leq |a| + |b|$

  2.) $||a| - |b|| \leq |a - b|$

  3.) $a \geq b \Leftrightarrow a^n \geq b^n \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} \geq \sqrt[n]{b}$

Taylorsatz

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}_{T_n(f; x_0)(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}}_{R_n(f; x_0)(x)}$$

$x_0 \hat{=}$ Entwicklungspunkt

c ist zwischen x & x_0

$T_n(f; x_0)(x)$ (n-tes Taylorpolynom um x_0)

$R_n(f; x_0)(x)$ (n-tes Restglied) → Fehler

Mittelwertsatz

wenn $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) dbar, dann:

$\exists c \in (a,b)$ mit $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

L'hôspital

nur bei $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$ / $\frac{-\infty}{+\infty}$ / $\frac{+\infty}{-\infty}$

Ableitung der Umkehrfunktion

$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

Injektivität wenn zu jedem y der Zielmenge Y höchstens ein, oder eventuell gar kein x der Definitionsmenge gehört.

Surjektivität jedes Element der Zielmenge wird mindestens einmal als Funktionswert angenommen.

Bijektivität → streng monoton wachsend.

GRAM-SCHMITT-VERFAHREN

$\vec{b}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}$ und für $k = 2, 3, \dots, m$ gilt:

$\vec{c}_k = \vec{v}_k - \sum_{j=1}^{k-1} (\vec{v}_k \cdot \vec{b}_j) \cdot \vec{b}_j$

$\vec{b}_k = \frac{\vec{c}_k}{\|\vec{c}_k\|}$

Zwischenwertsatz

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ist stetig. Wenn $f(a) < f(b)$ [bzw. $f(a) > f(b)$] und $f(a) < c < f(b)$ [bzw. $f(a) > c > f(b)$]. Dann: $\exists x_0$ mit $x_0 \in (a,b)$ und $f(x_0) = c$

Folgen

$(-1)^n + \frac{1}{n} \Rightarrow$ divergent

wenn $a_n \to a$, dann $|a_n| \to |a|$

wenn $a_n \to a$, dann $a_{n+1} \to a$

Dimensionsformel

$A \in K^{n \times m}$

$\left.\begin{array}{l} n \to \text{Zeile} \\ m \to \text{Spalte} \end{array}\right\} \dim(\text{Bild}(A)) + \dim(\text{Kern}(A)) = m$

Kern

- ZNF bilden → „−1 -Ergänzungstrick" → Kern ablesen. (Wenn Matrix invertierbar ⟺ Kern $= \{\vec{0}\}$)

Bild

- Vektoren aus der Matrix wählen → linear unabhängig! → nur so viele wie nach Dimensionsformel übrig bleiben

Konvergenzkriterien

① **Leibnitz Kriterium:** ① $a_n \to 0$ ② $a_n \geq 0$ ③ a_n monoton fallend

dann $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ ist konvergent

② **Wurzelkriterium:** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

→ wenn $\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ absolutkonvergent

→ wenn $\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ divergent

③ **Quotientenkriterium:** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Wenn $\limsup_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$ absolut Konvergent

wenn $\limsup_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$ divergent.

④ **Majorantenkriterium:** größere Reihe finden die Konvergiert → absolute Konvergenz (mit Beträgen)

⑤ **Minorantenkriterium:** Kleinenere Reihe finden die divergiert → divergenz (mit Beträgen)

Additionstheoreme:

① $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

② $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

③ $\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$

④ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

⑤ $\cot(x \pm y) = \frac{\cot x \cot y \mp 1}{\cot y \pm \cot x}$

1934787

Ableitungen

a) $(\tan(x))' = \frac{}{\cos^2(x)} = \tan^2(x) + 1$ b) $(\arctan(x))' = \frac{}{1+x^2}$ c) $(\text{arccot}(x))' = -\frac{}{1+x^2}$

d) $(\cot(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$ e) $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ f) $(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

g) $(\text{arcsinh}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ h) $(\text{arccosh}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ i) $(\text{arctanh}(x))' = \frac{1}{1-x^2}$ $(|x|>1)$

j) $(\text{arccoth}(x))' = \frac{1}{1-x^2}$ k) $(\sinh(x))' = \cos(h)$ l) $(\cosh(x))' = \sinh(x)$

m) $(\tanh(x))' = \frac{1}{\cosh^2(x)} = \tanh^2(x) + 1$

$$\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$$

Wichtige Umformung

Wichtige Funktionen

$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -i \cdot \sin(ix)$

$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cos(ix)$

$\text{arcsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

$\text{arccosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$

Komplexe Trigonometrische Funk.

$\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$

$\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$

Trigonometrische Funktionen

① $\cos(\varphi+\theta) = \cos(\varphi)\cos(\theta) - \sin(\varphi)\sin(\theta)$

② $\cos(\varphi-\theta) = \cos(\varphi)\cos(\theta) + \sin(\varphi)\sin(\theta)$

③ $\sin(\varphi+\theta) = \sin(\varphi)\cos(\theta) + \cos(\varphi)\sin(\theta)$

④ $\sin(\varphi)\cos(\theta) = \frac{\sin(\varphi+\theta) + \sin(\varphi-\theta)}{2}$

⑤ $\sin(\varphi)\sin(\theta) = \frac{\cos(\varphi-\theta) - \cos(\varphi+\theta)}{2}$

⑥ $\cos(\varphi)\cos(\theta) = \frac{\cos(\varphi+\theta) + \cos(\varphi-\theta)}{2}$

⑦ $\sin(2\varphi) = 2\sin(\varphi)\cos(\varphi)$

⑧ $\cos(2\varphi) = \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) = 1 - \sin^2(\varphi)$

Folgen für $n \to \infty$

① $\sqrt[n]{a} \to 1$ ② $\sqrt[n]{n} \to 1$

③ $\sqrt[n]{n!} \to \infty$ ④ $\frac{1}{n} \cdot \sqrt[n]{n!} \to \frac{1}{e}$

⑤ $(1+\frac{1}{n})^n \to e$ ⑥ $(1+\frac{x}{n})^n \to e^x$

⑦ $(1-\frac{x}{n})^n \to e^{-x}$ ⑧ $\frac{n^n}{n!} \to \infty$

Wichtige Reihen

a) Binomische Reihe

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

b) Binomial Koeffizient

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

c) e-Funktion:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

d) harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to \infty$$

e) geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

(Konvergent für $q<1$!)

evtl. auch:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_0 \cdot q^k = \frac{a_0}{1-q}$$

f) e-Zahl

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

g) 2-Zahl

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \to 2$$

h) ln(2)-Zahl

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$$

i) KONVERGENZ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$ ist Konvergent für alle $s>1$

$\to$ divergent für $s \leq 1$

Wichtige Potenzreihen

a) $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

b) $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}$

c) $\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

d) $\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

e) $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{2n+1}$

f) $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^n}{n}$

g) $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

h) $\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{0{,}5}{n} x^n$

Determinanten

- $\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$
- $\det(A^k) = (\det(A))^k$
- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- $\det(\lambda\cdot A) = \lambda^n\cdot\det(A)$

mit n Zeilen

Regeln:

→ nur Quadratische Matrizen haben Determinanten

→ A ist invertierbar $\Leftrightarrow \det(A)\neq 0$

→ Wenn $\det = 0$, dann existiert ein Kern

Matrizenregeln

$(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$

$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

$(k\cdot A)^{-1} = k^{-1}\cdot A^{-1}$

- $A^* \hat{=}$ adjungierte Matrix → Komplex konjugiert

Regeln:

- reguläre Matrix: Es existiert eine Inverse
- singuläre Matrix: Es existiert keine Inverse
- Die ZNF einer invertierbaren Matrix ist immer die Einheitsmatrix

Skalarprodukt:

$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + \ldots + a_n\cdot b_n \quad \forall a_k, b_k \in \mathbb{R}$

Im Komplexen:

$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1\cdot\overline{b_1} + a_2\cdot\overline{b_2} + \ldots + a_n\cdot\overline{b_n}$

(der hintere Vektor wird komplex konjugiert!)

Rechenregeln:

- $\langle \vec{a}+\vec{b}, \vec{c}\rangle = \langle\vec{a},\vec{c}\rangle + \langle\vec{b},\vec{c}\rangle$
- $\langle \vec{a}, \vec{b}+\vec{c}\rangle = \langle\vec{a},\vec{b}\rangle + \langle\vec{a},\vec{c}\rangle$
- $\langle \lambda\cdot\vec{a}, \vec{b}\rangle = \lambda\cdot\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$
- $\langle \vec{a}, \lambda\cdot\vec{b}\rangle = \overline{\lambda}\cdot\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$

Definition: hermitisch $:= \langle\vec{a},\vec{b}\rangle = \overline{\langle\vec{a},\vec{b}\rangle}$

Vergleich

$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} < \frac{a+b}{2}$

$\sin(x), \cos(x)$

- $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\cos(-x) = \cos(x)$

Synonyme:

$\exp(x) = e^x$

- $\log(x) = \ln(x)$

Potenzreihe

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

→ a_n: eine Folge

→ x_0: Entwicklungspunkt

Konvergenzradius R: Als Konvergenzradius einer Potenzreihe um den Entwicklungspunkt x_0 ist die größte Zahl R definiert, für welche die Potenzreihe für alle x mit $|x-x_0| < R$ konvergiert.

Berechnen: ① $R = \frac{1}{\lim(\sup)_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

② $R = \frac{1}{\lim(\sup)_{n\to\infty} \left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)}$

Der Determinantenentwicklungssatz

Sei $A \in K^{n\times n}$

Für jedes $b \in \{1,\ldots,n\}$ gilt:

① $\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+b}\cdot a_{bk}\cdot\det(A_{bk})$

→ Entwicklung bezüglich Zeile b

② $\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+b}\cdot a_{kb}\cdot\det(A_{kb})$

→ Entwicklung bezüglich Spalte b

[A_{kb} ist A ohne k-te Zeile und b-te Spalte]

[A_{bk} ist A ohne b-te Zeile und k-te Spalte]

Wichtige Integrale

$\int \arctan(x)\,dx = \int \arctan(x)\cdot 1\,dx$

$= [\arctan(x)\cdot x] - \int x\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx$

$\Rightarrow u = 1+x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx$

$\Rightarrow = [\arctan(x)\cdot x] - \int x\cdot\frac{1}{u}\,\frac{du}{2x}$

$= [\arctan(x)\cdot x] - \frac{1}{2}[\ln(u)]$

$= [\arctan(x)\cdot x] - \frac{1}{2}[\ln(1+x^2)]$

Funktioniert genau so (partiell, dann Substitution) für:

→ arccos, arcsin, arctan, arccot

→ arcsinh, arccoth, arccosh, arctanh

$\int \sin^2(x)\,dx = -\frac{\sin(2x)-2x}{4}$

$\int \cos^2(x)\,dx = \frac{\cos x\sin x + x}{2}$

$(\sin^2(x))' = 2\sin(x)\cos(x)$

$(\cos^2(x))' = -2\sin(x)\cos(x)$

$(\sin^2(ax))' = 2a\sin(ax)\cos(ax)$

$(\cos^2(ax))' = -2a\cos(ax)\sin(ax)$

Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

① Vektoren als Zeilenvektoren in Matrix schreiben

② ZSF bilden.

③ Wird eine Zeile komplett zu Null, so ist der Vektor, welcher ursprünglich in dieser Zeile war, linear abhängig von den anderen Vektoren und kann dem entsprechend weggelassen werden. Aus diesem Grund dürfen Zeilen beim bilden der ZSF nicht mehr vertauscht werden!

Beispiele: $\int x^2 \arcsin(x)\,dx \Rightarrow \left[\frac{x^3}{3}\arcsin(x)\right] - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \frac{du}{dx}... du = 2x \Rightarrow \left[\frac{x^3}{3}\arcsin(x)\right] - \frac{1}{6}\int \frac{...}{u}\,du$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\arcsin(x)\right] - \frac{1}{6}\int \frac{1-x^2}{u}\,du + \frac{1}{6}\int \frac{1}{u}\,du \Rightarrow \left[\frac{x^3}{3}\arcsin(x)\right] - \frac{1}{6}\int \frac{u^2}{u}\,du + \frac{1}{6}\int \frac{1}{u}\,du$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\arcsin(x)\right] - \frac{1}{6}\left[\frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2}\right] + \frac{1}{6}\left[2\cdot(1-x^2)^{1/2}\right]$$

$$\int \frac{1+x^2}{1+x}\,dx = \int \frac{1+x^2+2x}{1+x^2}\,dx = \int 1 + \frac{\frac{d}{dx}(1+x^2)}{1+x^2} = \left[x + \ln(1+x^2)\right]$$

$$\underline{\int e^x \cos(2x)\,dx} = \left[e^x \cos(2x)\right] + \int e^x \cdot 2\cdot \sin(2x)\,dx = \left[e^x \cdot \cos(2x)\right] + \left[2\cdot e^x \cdot \sin(2x)\right] - 4\underline{\int e^x \cdot \cos(2x)\,dx}$$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}}\,dx \Rightarrow y = x^2 \mid dy = 2x\,dx \Rightarrow \int \frac{y}{\sqrt{y-1}}\,dy = \frac{1}{2}\int \frac{y-1}{\sqrt{y-1}} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{y-1}} = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(y-1)^{3/2}\right] + \frac{1}{2}\left[2\sqrt{y-1}\right]$$

$$\int x\cdot \arctan(x)\,dx \Rightarrow \left[\frac{x^2}{2}\arctan(x)\right] - \int \frac{x^2}{2}\cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx \Rightarrow \left[\frac{x^2}{2}\arctan(x)\right] - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx \Rightarrow \left[\frac{x^2}{2}\arctan(x)\right] - \frac{1}{2}\int 1 - \frac{1}{1+x^2}\,dx \ldots$$

$$\int x\cdot \sin^2(3x)\,dx = \int \frac{x\cdot(1-\cos(6x))}{2}\,dx = \left[\frac{x^2}{4}\right] - \frac{1}{2}\int x\cdot \cos(6x)\,dx = \left[\frac{x^2}{4}\right] - \frac{1}{12}\left[x \sin(6x)\right] + \frac{1}{12}\int \sin(6x)\,dx \ldots$$

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}\,dx \quad y = x^2+1 \mid dy = 2x\,dx \Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{1}{y^{3/2}}\,dy = -\left[y^{-1/2}\right] = -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

- **komplexe Zahlen:**
  - $z^6 + 2z^3 + 1 = (z^3+1)^2 = 0$

$$0 = (z^3+1)^2 \Rightarrow 0 = z^3 + 1 \Rightarrow -1 = z^3 = e^{i(\pi + 2k\pi)}$$

$$\rightarrow z_1 = e^{i(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi)},\ z_2 = e^{i(\frac{\pi}{3} + 2k\pi)},\ z_3 = e^{i(\pi + 2k\pi)}$$

  - $z^3 = 2+2i \Rightarrow z' = \sqrt{8}\cdot e^{i\pi/4} \Rightarrow z_1 = \sqrt{8}^{1/3}\cdot e^{-\frac{7i}{12}},\ z_2 = \sqrt{8}^{1/3}\cdot e^{\frac{i}{12}},\ \sqrt{2}^{1/3}\cdot e^{3i/4}$
  - $z^4 = e^{i(\pi/2)} = e^{i(\pi/2 + 2\pi k)} \Rightarrow z_1 = e^{i(\frac{\pi}{8} + 2\pi k)},\ z_2 = e^{i(\frac{5\pi}{8} + 2\pi k)},\ z_3 = e^{i(\frac{9\pi}{8} + 2\pi k)}$

$$z_4 = e^{i(\frac{13\pi}{8} + 2\pi k)}$$

$$\int \frac{1}{x + \sqrt[3]{x}}\,dx \quad \Big| \quad u = \sqrt[3]{x} = x^{1/3} \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{3}x^{-2/3} \Rightarrow dx = 3x^{2/3}\,du \Rightarrow 3u^2\,du$$

$$\int \frac{3u^2}{u^3+u}\,du = 3\int \frac{u}{u^2+1} \qquad z = u^2+1 \quad \frac{dz}{du} = 2u \Rightarrow dz = \frac{du}{2u} \Rightarrow 3\int \frac{u}{z}\,\frac{dz}{2u} = \frac{3}{2}\int \frac{1}{z}\,dz$$

$$= \left[\frac{3}{2}\ln(z)\right] = \left[\frac{3}{2}\left[\ln(u^2+1)\right]\right] = \frac{3}{2}\left[\ln(x^{2/3}+1)\right]$$

Vollständige Induktion mit Integral:

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^\infty e^{-xs}\,dx\cdot(3x)^n = \frac{3^n\cdot n!}{s^{n+1}} \quad \Big| \quad \text{IS: } \lim_{b\to\infty}\int_0^b (3x)^{n+1} e^{-xs}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-s^{-1}(3x)^{n+1}e^{-xs}\right]_0^b + \ldots$$

$$\ldots + \lim_{b\to\infty} s^{-1}\int_0^b (n+1)\cdot 3\cdot(3x)^n\cdot e^{-xs}\,dx = 0 + 3(n+1)\frac{3^n\cdot n!}{s\cdot s^{n+1}} = \frac{3^{n+1}(n+1)!}{s^{n+2}} \quad \blacksquare \text{ q.e.d.}$$

→ Einheitsvektoren in Abbildungsmatrix einsetzen ergibt Matrix.

$l(\vec{x}) = M(l)\cdot\vec{x}$