Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski

Frühjahr 2011
28.02.2011

Bachelor–Modulprüfung

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen und Geodäsie

Aufgabe 1 $\quad$ (5 + 5 = 10 Punkte)

a) Gegeben seien die Mengen

$$K := \{\, z \in \mathbb{C} \;\big|\; |z - i| = 5 \,\} \qquad \text{und} \qquad H := \{\, z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \;\big|\; \arg(z) = \tfrac{3}{4}\pi \,\}\,.$$

i) Skizzieren Sie K und H in der komplexen Zahlenebene.

ii) Berechnen Sie $\operatorname{Re}(z)$ und $\operatorname{Im}(z)$ für jedes $z \in K \cap H$.

b) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! \leq n! \cdot 2\,.$

Aufgabe 2 $\quad$ (4 + 4 + 2 = 10 Punkte)

Gegeben sei die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k z^k,\ z \in \mathbb{C}\,.$

a) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, für die die Reihe konvergiert.

b) Berechnen Sie für alle $z \in \mathbb{R}$, für die die Reihe konvergiert, den Wert der Reihe.

c) Berechnen Sie $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}\right)^3.$

– bitte wenden –

Aufgabe 3 $\quad (4 + 6 = 10$ Punkte)

a) Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} \dfrac{x - \sin(x)}{x^2} & \text{falls } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{falls } x = 0\,. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, in welchen Stellen f differenzierbar ist, und bestimmen Sie dort die Ableitung f'.

b) Gegeben sei die Funktion

$$f : [-\pi, \pi] \to [-3\pi, 3\pi], \quad f(x) := 3x + \sin^2(x)\,.$$

i) Untersuchen Sie f auf Monotonie.

ii) Zeigen Sie, dass f bijektiv ist.

iii) Untersuchen Sie, ob die Umkehrfunktion von f im Punkt $\frac{3}{2}\pi + 1$ differenzierbar ist, und bestimmen Sie gegebenenfalls $(f^{-1})'\big(\frac{3}{2}\pi + 1\big)$.

Hinweis zu iii): Es gilt $f\big(\frac{\pi}{2}\big) = \frac{3}{2}\pi + 1$.

Aufgabe 4 $\quad (6 + 4 = 10$ Punkte)

a) Berechnen Sie die folgenden Integrale

i) $\displaystyle\int_{-1}^{\pi} \left|\cos\left(\tfrac{x+|x|}{2}\right)\right| dx\,,$

ii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{(x^2+1)^2} \cdot \left(\tfrac{1}{3}x^3 + x\right) dx\,.$

Hinweis zu ii): Partielle Integration.

b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f(1) = 1$ und $f(2) = 2$. Berechnen Sie

$$\frac{1}{2}\int_1^4 \left(f'(\sqrt{x}) + \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \right) dx\,.$$

Hinweis zu b): Es kann hilfreich sein, im Laufe der Rechnung das Integral in zwei Summanden aufzuspalten.

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:
Die Klausurergebnisse hängen ab Mittwoch, den 23.03.2011, am Schwarzen Brett neben Zimmer 3A-17 (Allianz-Gebäude 05.20) aus und liegen unter

`www.math.kit.edu/iana1`

im Internet. Die **Klausureinsicht** findet am Mittwoch, den 13.04.2011, von 14:00 Uhr bis 16:00 Uhr im Benz-Hörsaal statt. Die mündlichen Nachprüfungen sind in der Woche vom 18.04.2011 bis 21.04.2011 im Allianz-Gebäude 05.20.