KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) WS 2010/11
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dr. T. Gauss

**Lösungsvorschläge zur Bachelor–Modulprüfung
für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen und Geodäsie**

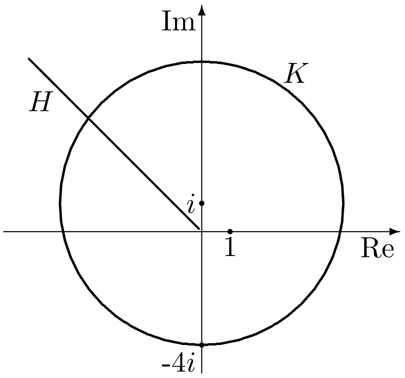
Aufgabe 1

a) **i)** Die Menge K besteht aus allen Punkten, die zum Punkt i den Abstand 5 haben; K ist also ein Kreis mit Radius 5 um i.
Außerdem gilt

$$H = \{ z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : \arg(z) = \tfrac{3}{4}\pi \} = \{ z \in \mathbb{C} : z = re^{\frac{3}{4}\pi i},\ r > 0 \} =$$

$$\{ z \in \mathbb{C} : z = r\Big(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\Big),\ r > 0 \} = \{ z \in \mathbb{C} : z = r(-1+i),\ r > 0 \}.$$

H ist also die Halbgerade durch 0 und $-1+i$ (ohne den Punkt 0).
Die gegebenen Mengen lassen sich damit wie folgt skizzieren.



ii) Sei $z \in K \cap H$. Wir setzen $x := \operatorname{Re} z$ und $y := \operatorname{Im} z$.
Wegen $z \in K$ gilt $25 = |z-i|^2 = |x + i(y-1)|^2 = x^2 + (y-1)^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1$.
Wegen $z \in H$ folgt wie in i) außerdem $x = -y$.
Aus beidem zusammen folgt $24 = x^2 + x^2 + 2x = 2(x^2 + x)$. Das ist gleichbedeutend mit $x = 3$ oder $x = -4$. Damit folgt $z = 3-3i$ oder $z = -4+4i$. Offenbar ist $3-3i \notin K \cap H$ und $-4+4i \in K \cap H$.
$K \cap H$ besteht also aus genau einem Punkt, nämlich $z = -4+4i$, und für dieses z gilt $\operatorname{Re} z = -4$ und $\operatorname{Im} z = 4$.

b) Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion:

I.A. ($n = 1$): Es gilt $\sum_{k=1}^{1} k! = 1 \leq 1! \cdot 2$.

I.S.: Für ein festes $n \in \mathbb{N}$ gelte $\sum_{k=1}^{n} k! \leq n! \cdot 2$ (I.V.). Dann folgt

$$\sum_{k=1}^{n+1} k! = \sum_{k=1}^{n} k! + (n+1)! \overset{\text{I.V.}}{\leq} 2n! + (n+1)! \leq$$

$$(n+1)n! + (n+1)! = 2(n+1)!;$$

die Induktionsbehauptung trifft dann also auch für $n+1$ zu.

Damit ist $\sum_{k=1}^{n} k! \leq n! \cdot 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

Aufgabe 2

a) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k z^k$ hat den Konvergenzradius

$R = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 1$. Da für kein z mit $|z| = 1$

$k z^k \to 0$ $(k \to \infty)$ gilt, konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} k z^k$ für

alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ und für keine anderen z.

b) Nach a) ist $f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} k x^k$ genau für x mit $|x| < 1$

definiert. Beachtet man $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$, und

$\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1}$ für $|x| < 1$, so folgt:

$f(x) = x\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$, $|x| < 1$.

c) $\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}\right)^3 = \left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)^3 = \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}\right)^3 = 8$

Aufgabe 3

a) Auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist f als Komposition differenzierbarer Funktionen differenzierbar und für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt nach der Quotientenregel

$$f'(x) = \frac{(1-\cos x)x^2 - 2x(x-\sin x)}{x^4} = \frac{-x - x\cos x + 2\sin x}{x^3}.$$

Außerdem gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + - \dots\right)}{x^3} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 - + \dots}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3!} - \frac{1}{5!}x^2 + \frac{1}{7!}x^4 - + \dots = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}.$$

Damit ist f in 0 differenzierbar und es gilt $f'(0) = \frac{1}{6}$.

Fazit: f ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-x - x\cos x + 2\sin x}{x^3} & \text{falls } x \neq 0\,, \\ \dfrac{1}{6} & \text{falls } x = 0\,. \end{cases}$$

b) **i)** f ist als Komposition differenzierbarer Funktionen differenzierbar und es gilt $f'(x) = 3 + 2\sin(x)\cos(x)$.

Weiter gilt $f'(x) = 3 + 2\sin(x)\cos(x) \geq 3 - 2 = 1 > 0$.

Daraus folgt, daß f auf $[-\pi, \pi]$ streng monoton wachsend ist.

ii) Aus i) folgt, daß f injektiv ist.

Wegen $f(-\pi) = -3\pi$ und $f(\pi) = 3\pi$ folgt aus dem Zwischenwertsatz für die stetige Funktion f, daß jedes $y \in [-3\pi, 3\pi]$ als Funktionswert angenommen wird. Also ist f surjektiv.

Insgesamt folgt, daß f bijektiv ist.

iii) Gemäß i) gilt $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 + 2 \cdot 1 \cdot 0 = 3 \neq 0$.

Damit folgt aus dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion, daß f^{-1} in $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{2}\pi + 1$ differenzierbar ist und es gilt

$$(f^{-1})'\left(\tfrac{3}{2}\pi + 1\right) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(\frac{3}{2}\pi + 1\right)\right)} = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{3}.$$

Aufgabe 4

a) **i)** Es gilt

$$\int_{-1}^{\pi} \left|\cos\left(\tfrac{x+|x|}{2}\right)\right| dx = \int_{-1}^{0} \left|\cos\left(\tfrac{x+(-x)}{2}\right)\right| dx + \int_{0}^{\pi} \left|\cos\left(\tfrac{x+x}{2}\right)\right| dx =$$

$$\int_{-1}^{0} 1\, dx + \int_{0}^{\pi} |\cos x|\, dx = 1 + \int_{0}^{\pi/2} \cos x\, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} -\cos x\, dx =$$

$$1 + [\sin x]_{x=0}^{x=\pi/2} + [-\sin x]_{x=\pi/2}^{x=\pi} = 1 + 1 - 0 + (-0) - (-1) = 3.$$

ii) Mit partieller Integration folgt

$$\int_0^1 \frac{2x}{(x^2+1)^2} \cdot \left(\tfrac{1}{3}x^3 + x\right) dx =$$

$$\left[-\frac{1}{(x^2+1)} \cdot \left(\tfrac{1}{3}x^3 + x\right)\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 -\frac{1}{(x^2+1)} \cdot (x^2+1)\, dx =$$

$$\frac{-1}{2} \cdot \frac{4}{3} - (-1) \cdot 0 + \int_0^1 1\, dx = \frac{-2}{3} + 1 = \frac{1}{3}.$$

b) Wir substituieren $t = \sqrt{x}$ („$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2t}$, $2t\, dt = dx$“).

$$\frac{1}{2} \int_1^4 f'(\sqrt{x}) + \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \left(f'(t) + \frac{f(t)}{t}\right) \cdot 2t\, dt = \int_1^2 t f'(t) + f(t)\, dt =$$

$$\int_1^2 t f'(t)\, dt + \int_1^2 f(t)\, dt.$$

Mit partieller Integration folgt

$$\int_1^2 t f'(t)\, dt = [t f(t)]_{t=1}^{t=2} - \int_1^2 1 \cdot f(t)\, dt = 2f(2) - 1f(1) - \int_1^2 1 \cdot f(t)\, dt = 3 - \int_1^2 1 \cdot f(t)\, dt.$$

Also gilt

$$\frac{1}{2} \int_1^4 f'(\sqrt{x}) + \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx = 3 - \int_1^2 1 \cdot f(t)\, dt + \int_1^2 f(t)\, dt = 3.$$

Bemerkung:
Die Berechnung läßt sich auch „durch scharfes Hinsehen“ wie folgt abkürzen: Es gilt

$$t f'(t) + f(t) = \big(t f(t)\big)'.$$

Damit erhält man auch ohne partielle Integration

$$\int_1^2 t f'(t) + f(t)\, dt = [t f(t)]_{t=1}^{t=2} = 2f(2) - 1f(1) = 3.$$