Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark

Frühjahr 2012
12.03.2012

Bachelor–Modulprüfung

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Aufgabe 1 **(4 + 3 + 3 = 10 Punkte)**

a) Berechnen Sie den Betrag und das Argument von

$$\frac{2+10i}{2-3i}$$

und bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil von

$$\left(\frac{2+10i}{2-3i}\right)^{10}.$$

b) Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} 5^{-n}\binom{2n-1}{n}$$

auf Konvergenz.

c) Prüfen Sie, ob folgende Grenzwerte existieren, und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3 - x\sqrt{x^4-x}\right)$

ii) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cosh(x+1)}{\cosh(x)}$

Aufgabe 2 **(5 + 5 = 10 Punkte)**

a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_1 := 1\,,\qquad a_2 := 1 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} := 2a_n + 3a_{n-1} \quad \text{für alle } n\in\mathbb{N} \text{ mit } n\geqslant 2.$$

Zeigen Sie, dass für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt:

$$a_n = \frac{1}{2}\left(3^{n-1} + (-1)^{n-1}\right).$$

b) Gegeben sei die reelle Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\,\frac{9^{n-1}}{n}\,x^n\,.$$

i) Berechnen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe.

ii) Ermitteln Sie die Menge aller Punkte $x\in\mathbb{R}$, in denen die Potenzreihe konvergiert.

iii) Bestimmen Sie für jedes $x\in(-R,R)$ den Wert der Reihe.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (4 + 6 = 10 Punkte)

a) Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x} + \ln(x^2)\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Geben Sie alle $x_0 \in \mathbb{R}$ an, in denen f differenzierbar ist, und bestimmen Sie in diesen Stellen $f'(x_0)$.

b) i) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$g\colon [0, \pi/2] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^x(\cos x + \sin x)$$

auf $[0, \pi/2]$ monoton wachsend ist.

ii) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass für alle $x, y \in [0, \pi/2]$ gilt:

$$\left|e^x \sin x - e^y \sin y\right| \leqslant e^{\pi/2} \, |x - y| \, .$$

iii) Begründen Sie, dass die Gleichung

$$e^x(\cos x + \sin x) = 2$$

genau eine Lösung $x \in (0, \pi/2)$ besitzt.

Aufgabe 4 (8 + 2 = 10 Punkte)

a) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

i) $$\int_0^1 \frac{(\arctan x)^2}{1 + x^2} \, dx$$

ii) $$\int_0^{e-1} \frac{x + 2}{(x + 1)^2} \, dx$$

iii) $$\int_1^{\sqrt{\ln 2}} x^3 e^{2x^2} \, dx$$

b) Untersuchen Sie, ob der Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} x^{-4} \int_0^x \sin(t^3) \, dt$$

existiert, und berechnen Sie diesen gegebenenfalls.

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:
Die Klausurergebnisse hängen ab Freitag, den 30.03.2012, am Schwarzen Brett neben Zimmer 3A-17 (Allianz-Gebäude 05.20) aus und liegen unter

`www.math.kit.edu/iana1`

im Internet. Die **Klausureinsicht** findet am Mittwoch, den 18.04.2012, von 15:45 bis 17:30 Uhr im Benz-Hörsaal statt. Die mündlichen Nachprüfungen sind in der Woche vom 23.04.2012 bis 27.04.2012 im Allianz-Gebäude 05.20.