Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark

Frühjahr 2012
12.03.2012

Bachelor–Modulprüfung

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

a) Für $z := \frac{2+10i}{2-3i}$ gilt

$$z = \frac{2+10i}{2-3i} \cdot \frac{2+3i}{2+3i} = \frac{4+20i+6i-30}{4+9} = \frac{-26+26i}{13} = -2+2i = \sqrt{8}\, e^{i\frac{3}{4}\pi}\,.$$

Also ist $|z| = \sqrt{8}$ und $\arg z = \frac{3}{4}\pi$. Wegen

$$z^{10} = 8^{\frac{10}{2}}\, e^{i\frac{30}{4}\pi} = 8^5\, e^{i(6+\frac{3}{2})\pi} = 8^5\, e^{i\frac{3}{2}\pi} = -8^5 i$$

ergibt sich $\mathrm{Re}(z^{10}) = 0$ und $\mathrm{Im}(z^{10}) = -8^5$.

b) Setze $a_n := 5^{-n}\binom{2n-1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt dann $a_n \neq 0$ und

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{5^{-n-1}\binom{2n+1}{n+1}}{5^{-n}\binom{2n-1}{n}} = \frac{1}{5}\,\frac{\frac{(2n+1)!}{(n+1)!\,(2n+1-(n+1))!}}{\frac{(2n-1)!}{n!\,(2n-1-n)!}} = \frac{1}{5}\,\frac{(2n+1)!}{(n+1)!\,n!}\,\frac{n!\,(n-1)!}{(2n-1)!}$$
$$= \frac{1}{5}\,\frac{(2n+1)\,2n}{(n+1)\,n} = \frac{2}{5}\,\frac{2+1/n}{1+1/n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{5}\,\frac{2+0}{1+0} = \frac{4}{5}\,.$$

Wegen $\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{4}{5} < 1$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Quotientenkriterium absolut konvergent und daher konvergent.

c) **i)** Für jedes $x > 1$ gilt

$$x^3 - x\sqrt{x^4-x} = \left(x^3 - x\sqrt{x^4-x}\right)\cdot\frac{x^3+x\sqrt{x^4-x}}{x^3+x\sqrt{x^4-x}} = \frac{x^6 - x^2(x^4-x)}{x^3 + x\sqrt{x^4(1-1/x^3)}}$$
$$= \frac{x^3}{x^3 + x^3\sqrt{1-1/x^3}} = \frac{1}{1+\sqrt{1-1/x^3}}\,.$$

Wegen $1/x^3 \to 0$ für $x \to \infty$ existiert der zu untersuchende Grenzwert nach den Grenzwertsätzen und es gilt

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^3 - x\sqrt{x^4-x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{1-1/x^3}} = \frac{1}{1+\sqrt{1-0}} = \frac{1}{2}\,.$$

ii) Für jedes $x > 0$ gilt

$$\frac{\cosh(x+1)}{\cosh(x)} = \frac{e^{x+1}+e^{-x-1}}{e^x+e^{-x}}\cdot\frac{e^{-x}}{e^{-x}} = \frac{e+e^{-2x-1}}{1+e^{-2x}} \xrightarrow{x\to\infty} \frac{e+0}{1+0} = e\,.$$

Aufgabe 2

a) Wir zeigen $a_n = \frac{1}{2}(3^{n-1} + (-1)^{n-1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mittels (starker) Induktion.

Induktionsanfang: Es gilt $a_1 = 1 = \frac{1}{2}(1+1) = \frac{1}{2}(3^{1-1} + (-1)^{1-1})$ und $a_2 = 1 = \frac{1}{2}(3-1) = \frac{1}{2}(3^{2-1} + (-1)^{2-1})$. Also ist die Gleichung $a_n = \frac{1}{2}(3^{n-1} + (-1)^{n-1})$ für $n = 1$ und $n = 2$ erfüllt.

Induktionsschluss: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$. Es gelte sowohl $a_{n-1} = \frac{1}{2}(3^{n-2} + (-1)^{n-2})$ als auch $a_n = \frac{1}{2}(3^{n-1} + (-1)^{n-1})$ (IV). Dann folgt mit der Rekursionsformel

$$\begin{aligned} a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1} &\overset{\text{(IV)}}{=} 2 \cdot \frac{1}{2}\big(3^{n-1} + (-1)^{n-1}\big) + 3 \cdot \frac{1}{2}\big(3^{n-2} + (-1)^{n-2}\big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(2 \cdot 3^{n-1} + 2(-1)^{n-1} + 3^{n-1} + 3(-1)^{n-2}\Big) = \frac{1}{2}\Big((2+1)3^{n-1} + (-2+3)(-1)^n\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(3^n + (-1)^n\Big) = \frac{1}{2}\Big(3^{(n+1)-1} + (-1)^{(n+1)-1}\Big). \end{aligned}$$

b) **i)** Setze $a_n := (-1)^{n-1}\frac{9^{n-1}}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{9^n \cdot 1/9}{n}} = \frac{9 \cdot \sqrt[n]{1/9}}{\sqrt[n]{n}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{9 \cdot 1}{1} = 9\,,$$

so dass der Konvergenzradius R der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ gleich $1/9$ ist.

ii) Gemäß i) konvergiert die Reihe absolut für $|x| < 1/9$ und divergiert für $|x| > 1/9$.

Für $x = 1/9$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = -\frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ nach dem Leibnizkriterium konvergent, weil $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist (vgl. Vorlesung).

Im Fall $x = -1/9$ ergibt sich $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = -\frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, also (bis auf einen Vorfaktor) die harmonische Reihe, welche divergent ist (vgl. Vorlesung).

Fazit: Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ konvergiert genau für $x \in (-1/9, 1/9]$.

iii) Wie eben nachgerechnet, ist die Funktion $f\colon (-1/9, 1/9) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{9^{n-1}}{n}x^n$ wohldefiniert. Nach einem Satz der Vorlesung ist f differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}9^{n-1}x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-9x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-9x)^k \overset{\text{geom. Reihe}}{=} \frac{1}{1+9x}$$

für jedes $x \in (-1/9, 1/9)$. Definiere $g(x) := \frac{1}{9}\ln(1+9x)$, $x \in (-1/9, 1/9)$. Da dann die Ableitungen von f und g auf dem Intervall $(-1/9, 1/9)$ übereinstimmen, gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = g(x) + c$ für alle $x \in (-1/9, 1/9)$. Setzt man in diese Gleichung $x = 0$ ein, so erhält man unmittelbar $c = 0$. Also gilt für alle $x \in (-1/9, 1/9)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{9^{n-1}}{n}x^n = \frac{1}{9}\ln(1+9x)\,.$$

Aufgabe 3

a) Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist die Funktion f als Komposition differenzierbarer Funktionen differenzierbar (man beachte dabei, dass $\ln(x^2)$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert und differenzierbar ist). Die Ableitung in diesen Punkten ist gegeben durch

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\cos(\frac{1}{x} + \ln(x^2)) - x^2 \sin(\frac{1}{x} + \ln(x^2))(-\frac{1}{x^2} + \frac{2x}{x^2}) \\ &= 2x\cos(\frac{1}{x} + \ln(x^2)) + (1-2x)\sin(\frac{1}{x} + \ln(x^2)), \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Um die Differenzierbarkeit von f im Punkt $x_0 = 0$ zu untersuchen, betrachten wir den Differenzenquotienten. Für jedes $x \neq 0$ gilt

$$\left|\frac{f(x) - f(0)}{x}\right| = \left|x\cos(\frac{1}{x} + \ln(x^2))\right| = |x| \left|\cos(\frac{1}{x} + \ln(x^2))\right| \xrightarrow{x \to 0} 0,$$

da $|\cos(y)| \leqslant 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$ ist. Folglich ergibt sich $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 0$, d.h. f ist auch in $x_0 = 0$ differenzierbar mit $f'(0) = 0$.

b) **i)** Nach der Produktregel ist g differenzierbar und es gilt für alle $x \in [0, \pi/2]$

$$g'(x) = e^x(\cos x + \sin x) + e^x(-\sin x + \cos x) = 2e^x \cos x \geqslant 0\,.$$

Infolgedessen ist g auf $[0, \pi/2]$ monoton wachsend. [1]

ii) Definiere die Funktion $f\colon [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto e^t \sin t$. Dann ist f differenzierbar mit $f'(t) = e^t \sin t + e^t \cos t = g(t)$ für jedes $t \in [0, \pi/2]$.
Seien $x, y \in [0, \pi/2]$. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein ξ zwischen x und y mit

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)\,. \tag{$*$}$$

Insbesondere liegt ξ im Intervall $[0, \pi/2]$. Da $g(t) \geqslant 0$ für alle $t \in [0, \pi/2]$ gilt und g auf $[0, \pi/2]$ monoton wachsend ist (vgl. i)-Teil), ergibt sich

$$|f'(\xi)| = |g(\xi)| = g(\xi) \leqslant g(\pi/2) = e^{\pi/2}\,.$$

Mit $(*)$ folgt

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)|\,|x - y| \leqslant e^{\pi/2}\,|x - y|\,.$$

iii) Es gilt

$$g(0) = 1 < 2 < e \leqslant e^{\pi/2} = g(\pi/2)\,. \tag{$**$}$$

Da g stetig ist, ist 2 nach dem Zwischenwertsatz in $g([0, \pi/2])$ enthalten, d.h. es gibt ein $x \in (0, \pi/2)$ mit $g(x) = 2$ (nach $(**)$ kann man die Randpunkte 0, $\pi/2$ ausschließen).

Wegen $g'(t) \overset{\text{i)}}{=} 2e^t \cos t > 0$ für alle $t \in (0, \pi/2)$ ist g auf $(0, \pi/2)$ streng monoton wachsend; folglich ist x eindeutig bestimmt.
Fazit: Die Gleichung $g(x) = 2$ besitzt genau eine Lösung in $(0, \pi/2)$.

[1] Da g auf $[0, \pi/2]$ stetig differenzierbar ist und $g'(x) > 0$ für alle $x \in (0, \pi/2)$ gilt, ist g sogar streng monoton wachsend auf $[0, \pi/2]$.

Aufgabe 4

a) **i)** Die durch $F(x) := \frac{1}{3}(\arctan x)^3$ definierte Funktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist nach der Kettenregel auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $F'(x) = (\arctan x)^2 \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Daher gilt

$$\int_0^1 \frac{(\arctan x)^2}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 F'(x)\,dx = \big[F(x)\big]_0^1 = F(1) - F(0) = \frac{1}{3}\Big(\frac{\pi}{4}\Big)^3.$$

ii) Es gilt

$$\int_0^{e-1} \frac{x+2}{(x+1)^2}\,dx = \int_0^{e-1} \frac{(x+1)+1}{(x+1)^2}\,dx = \int_0^{e-1} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$$
$$= \Big[\ln|x+1| - \frac{1}{x+1}\Big]_0^{e-1} = \ln e - \frac{1}{e} - (\ln 1 - 1) = 2 - \frac{1}{e}.$$

iii) Mit der Substitution $u = x^2, du = 2x\,dx$ und anschließender partieller Integration ergibt sich

$$\int_1^{\sqrt{\ln 2}} x^3 e^{2x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{\ln 2}} x^2 e^{2x^2}\,2x\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{\ln 2} u e^{2u}\,du = \frac{1}{2}\Bigg(\Big[u\,\frac{e^{2u}}{2}\Big]_1^{\ln 2} - \int_1^{\ln 2} \frac{e^{2u}}{2}\,du\Bigg)$$
$$= \frac{1}{2}\Big[u\,\frac{e^{2u}}{2} - \frac{e^{2u}}{4}\Big]_1^{\ln 2} = \frac{1}{2}\Big(\ln 2 \cdot \frac{4}{2} - \frac{4}{4} - \Big(\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4}\Big)\Big) = \ln 2 - \frac{1}{2} - \frac{e^2}{8}.$$

b) Definiere die Funktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $F(x) := \int_0^x \sin(t^3)\,dt$, $x \in \mathbb{R}$. Dann ist F nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung differenzierbar mit $F'(x) = \sin(x^3)$, $x \in \mathbb{R}$. Unter Verwendung von $\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$ ergibt sich

$$\lim_{x\to 0} \frac{F'(x)}{4x^3} = \frac{1}{4}\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^3)}{x^3} = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}.$$

Wegen $\lim_{x\to 0} F(x) = 0 = \lim_{x\to 0} x^4$ existiert somit der zu untersuchende Grenzwert nach der Regel von de l'Hospital und es gilt

$$\lim_{x\to 0} x^{-4}\int_0^x \sin(t^3)\,dt = \lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{F'(x)}{4x^3} = \frac{1}{4}.$$