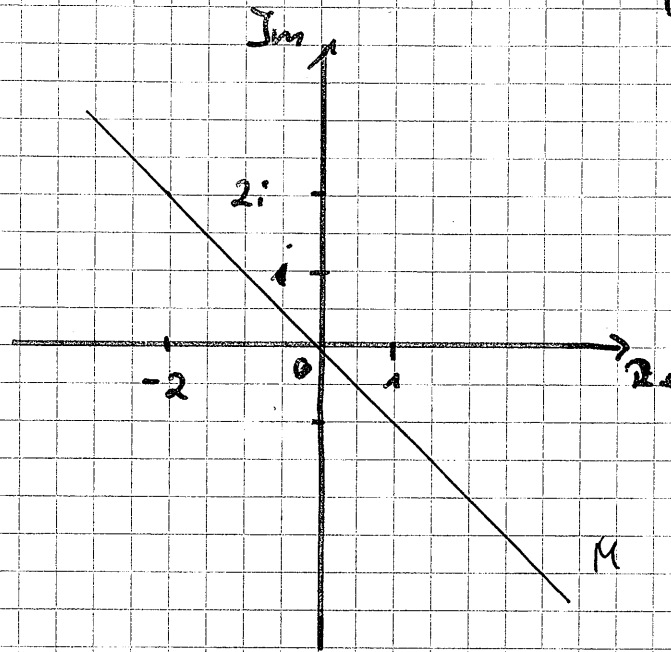


Aufgabe 1

a)



(M ist die Menge der Punkte $z \in \mathbb{C}$, die zu -2 und $2i$ denselben Abstand haben.)

$$M = \left\{ t \cdot e^{-i \frac{\pi}{4}} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$b, \quad \frac{-6+10i}{1+4i} = \frac{(-6+10i) \cdot (1-4i)}{(1+4i)(1-4i)} = \frac{-6+40+(10+24)i}{17}$$

$$= 2+2i = 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = 2\sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}};$$

$$\Rightarrow z_k = (2\sqrt{2})^{1/3} \cdot e^{i \left(\frac{\pi}{4} + k2\pi \right) \frac{1}{3}}, k=0,1,2$$

sind alle komplexe Lösungen z von

$$z^3 = \frac{-6+10i}{1+4i}$$

$$z_0 = \sqrt[3]{2} e^{i\pi/12}, \quad z_1 = \sqrt[3]{2} e^{i \frac{3\pi}{4}},$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2} e^{i \frac{17\pi}{12}};$$

Aufgabe 1

c) Es ist

$$\frac{1+i}{1-i} = i$$

$$a := \frac{(1+i)^{n+1}}{(1-i)^n} + \frac{(1-i)^{n+1}}{(1+i)^n} = i^n (1+i) + (-i)^n (1-i)$$

$$= i^n (1+(-1)^n) + i^{n+1} (1+(-1)^{n+1})$$

$$= \begin{cases} i^{2k} 2 = (-1)^k 2, & n=2k \\ i^{2k+2} 2 = (-1)^{k+1} 2, & n=2k+1 \end{cases} \quad k=0,1,2,\dots$$

Also: $\operatorname{Re}(a_n) = \begin{cases} 2(-1)^k, & n=2k \\ 2(-1)^{k+1}, & n=2k+1 \end{cases}$, $\operatorname{Im}(a_n) = 0$

Aufgabe 2:

$$a) \quad g'(x) = \frac{3}{4} - \frac{3}{2x^4} = \frac{3(x^4 - 2)}{4x^4}$$

$$> 0 \quad \text{für} \quad x > \sqrt[4]{2}$$

$\Rightarrow g$ streng monoton steigend

$$g(x) = x - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2x^3} = x - \frac{x^4 - 2}{4x^3}$$

$$\Rightarrow g(\sqrt[4]{2}) = \sqrt[4]{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$$

$\left. \begin{array}{l} \text{zusammen} \\ \Rightarrow \\ \text{mit} \\ \text{Monotonie} \end{array} \right\}$

$$g([\sqrt[4]{2}, \infty)) = [\sqrt[4]{2}, \infty)$$

b) (i) Beh: $a_n > \sqrt[4]{2}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Beu: (mittels vollständiger Ind.)

$n=0$: $a_0 = 4 > \sqrt[4]{2}$ ✓

$n \rightarrow n+1$: $a_{n+1} = g(a_n) \stackrel{(a)}{>} \sqrt[4]{2}$
 $\quad \quad \quad \underbrace{\quad}_{> \sqrt[4]{2}} \quad \text{nach i. H.}$

□

② Außerdem

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= a_n - \frac{3}{4} a_n - \frac{1}{2a_n^3} = \frac{1}{4} a_n - \frac{1}{2a_n^3} \\ &= \frac{a_n^4 - 2}{4a_n^3} > 0 \\ &\quad \uparrow \\ &\quad a_n > \sqrt[4]{2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ streng monoton fallend

c) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (streng) monoton fallend
und nach unten durch $\sqrt[4]{2}$ beschränkt

$\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen ein $a \in [\sqrt[4]{2}, \infty)$

$$\begin{aligned} a &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\frac{3}{4} a_n + \frac{1}{2a_n^3} \right)}_{= g(a_n)} \\ &\quad g \text{ stetig } \nabla c \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{4} a + \frac{1}{2a^3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} a - \frac{1}{2a^3} = 0 \Rightarrow \frac{a^4 - 2}{4a^3} = 0$$

$$\Rightarrow a^4 - 2 = 0 \quad (a > 0) \Rightarrow a = \sqrt[4]{2}.$$

Aufgabe 3:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \bar{I}_n &= \int_0^1 x^n e^{ax} dx \\
 &= \left[\frac{1}{a} x^n e^{ax} \right]_{x=0}^1 - \frac{n}{a} \int_0^1 x^{n-1} e^{ax} dx \\
 \text{p. I.} \quad &= \frac{e^a}{a} - \frac{n}{a} \bar{I}_{n-1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}
 \end{aligned}$$

$$\bar{I}_0 = \int_0^1 e^{ax} dx = \frac{e^a}{a} - \frac{1}{a} i$$

$$\bar{I}_1 = \frac{e^a}{a} - \frac{1}{a} \bar{I}_0 = \frac{e^a}{a} - \frac{e^a}{a^2} + \frac{1}{a^2} i$$

$$\bar{I}_2 = \frac{e^a}{a} - \frac{2}{a} \bar{I}_1 = \frac{e^a}{a} - 2 \frac{e^a}{a^2} + 2 \frac{e^a}{a^3} - \frac{2}{a^3} i$$

$$\begin{aligned}
 \bar{I}_3 &= \frac{e^a}{a} - \frac{3}{a} \bar{I}_2 = \frac{e^a}{a} - 3 \frac{e^a}{a^2} + 6 \frac{e^a}{a^3} - 6 \frac{e^a}{a^4} \\
 &\quad + \frac{6}{a^4} i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{e^{-2x_k/n}}{\sqrt{1 - e^{-2x_k/n}}} \right) &\quad \text{Zwischensumme} \\
 &\quad \text{mit Zerlegung} \\
 &\quad x = \frac{k}{n} \text{ \& Stützstellen} \\
 &\quad \xi_k = \frac{k}{n} \\
 &= \int_0^1 \frac{e^{-2x}}{\sqrt{1 - e^{-2x}}} dx \\
 &\quad \sqrt{1 - e^{-2x}} \\
 &\quad \int_0^1 1 d\xi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Subst: } \xi &= \sqrt{1 - e^{-2x}} \\
 d\xi &= \frac{e^{-2x}}{\sqrt{1 - e^{-2x}}} dx
 \end{aligned}$$

$$= \sqrt{1 - e^{-2}} i$$

Aufgabe 4

a) Betrachte $f(t) := \ln(t) - \sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}$ für $t \geq 1$.

Es gelten $f(1) = 0$ und

$$f'(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{2t^{3/2}}$$

$$= -\frac{1}{2t^{3/2}} (1 - 2\sqrt{t} + t) = -\frac{1}{2t^{3/2}} (1 - \sqrt{t})^2 < 0$$

für $t > 1$. f ist streng monoton fallend für $t \geq 1$.

$$\Rightarrow \underline{f(t) < f(1) = 0 \text{ für } t > 1.}$$

b) Wir formen die vorgelegte Ungleichung äquivalent

um: $\sqrt{xy} < \frac{y-x}{\ln(y) - \ln(x)}, \quad 0 < x < y$

$$\stackrel{|\cdot \frac{1}{x}|}{\Leftrightarrow} \sqrt{\frac{y}{x}} < \frac{\frac{y}{x} - 1}{\ln(\frac{y}{x})}$$

$$\Leftrightarrow \ln(\frac{y}{x}) < \sqrt{\frac{y}{x}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{y}{x}}}$$

$$\Leftrightarrow \ln(\frac{y}{x}) - \sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{y}{x}}} < 0$$

und das ist nach a) wegen $\frac{y}{x} > 1$ richtig.