Karlsruhe Institut für Technologie (KIT) — Frühjahr 2014
Institut für Analysis — 06.03.2014
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann

Modulprüfung / Bachelor
Höhere Mathematik I für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

a) Induktionsanfang (IA): Für $n = 1$ stimmt die Behauptung, denn beide Seiten der Gleichung ergeben dann 3: $1 \cdot 3 = \frac{1(1+1)(4+5)}{6}$.

Induktionsschluss (IS): Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte $\sum_{k=1}^{n} k(2k+1) = \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$ (Induktionsvoraussetzung, kurz: IV). Dann folgt

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(2k+1) = \sum_{k=1}^{n} k(2k+1) + (n+1)(2n+3) \overset{\text{IV}}{=}$$

$$\frac{n(n+1)(4n+5)}{6} + (n+1)(2n+3) = \frac{(n+1)(4n^2+5n+12n+18)}{6} =$$

$$\frac{(n+1)[(n+1)+1][4(n+1)+5]}{6}.$$

b) Wegen $1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{i(\frac{\pi}{4}+2\pi k)}, k = 0, \pm1, \pm2, ...$ und $1 - i = \sqrt{2} \cdot e^{i(-\frac{\pi}{4}+2\pi k)}, k = 0, \pm1, \pm2, ...$ gilt $z^5 = e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)}, k = 0, \pm1, \pm2, ...$. Die Lösungen der Gleichung sind

1) $z_1 = e^{i(\frac{\pi}{10}+2\pi k)}$ **2)** $z_2 = e^{i(\frac{5\pi}{10}+2\pi k)}$ **3)** $z_3 = e^{i(\frac{9\pi}{10}+2\pi k)}$
4) $z_4 = e^{i(\frac{13\pi}{10}+2\pi k)}$ **5)** $z_5 = e^{i(\frac{17\pi}{10}+2\pi k)}$

mit $k = 0, \pm1, \pm2, ...$.

c) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3+1}{2n^2-5n^3+3n+10} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n}-5+\frac{3}{n^2}+\frac{10}{n^3}} = -\frac{3}{5} .$$

Aufgabe 2

a) Offensichtlich gilt für $n \geq 4$

$$[\sqrt{n}+(-1)]^3 \geq \frac{1}{2}n^{\frac{3}{2}} .$$

Daraus folgt, dass für $n \geq 4$

$$\left|\frac{1}{[\sqrt{n}+(-1)^{n-1}]^3}\right| \leq 2n^{-\frac{3}{2}}$$

gilt. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert die Reihe absolut.

b) Es gilt

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{(n+2)}}{n-1}} = 2\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{4}{n-1}} = 2$$

Der Konvergenzradius ist $\frac{1}{2}$.
Wir untersuchen nun die Konvergenz der Reihe in den Punkten $x = \frac{1}{2}$ und $x = -\frac{1}{2}$.
Für $x = -\frac{1}{2}$ gilt

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{n+2}}{(n-1)}x^n = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{2n-1}\frac{4}{(n-1)} = -\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4}{(n-1)} = -4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}.$$

.

Das ist die harmonische Reihe, die divergent ist.
Für $x = \frac{1}{2}$ bekommen wir eine alternierende Reihe $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{4}{(n-1)}$, die nach dem Leibnizkriterium konvergent ist.
Fazit: Die Menge aller Punkte $x \in \mathbb{R}$, in denen die Reihe konvergiert, ist $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Aufgabe 3

a) **i)** Es gilt nach der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin ax}{\ln\sin bx} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin bx\cdot\cos ax\cdot a}{\sin ax\cdot\cos bx\cdot b} = \frac{b\cdot x\cdot a}{a\cdot x\cdot b} = 1\,.$$

ii) Es gilt

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\tan x)^{\frac{1}{3}}-1}{2\sin^2 x-1} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{3}\cdot(\tan x)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{4\sin x\cos x} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 2}{4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{3}\,.$$

b) Die Funktion f ist auf dem Intervall [-2,2] differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = e^x(x^2+x-5) + e^x(2x+1) = e^x(x^2+3x-4) = e^x(x+4)(x-1).$$

Die Ableitung der Funktion f hat auf $[-2,2]$ nur eine Nullstelle im Punkt $x=1$. Der Punkt $x=-4$ liegt nicht auf dem Intervall $[-2,2]$.
Wir berechnen die Werte von f an den Stellen $x=-2,\ x=1,\ x=2$ und bekommen, dass $f_{\max} = f(2) = e^2$ und $f_{\min} = f(1) = -3e$.

c) Die Funktion $f:(1,2)\to\mathbb{R},\quad x\to\ln(x-1)+\cos^2(x)$ ist stetig und es gilt

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = -\infty,\qquad \lim_{x\to 2-0} f(x) = \cos^2(2) > 0.$$

Die stetige Funktion f nimmt in $(1,2)$ positive und negative Werte. Nach dem Zwischenwertsatz existiert $\xi\in(1,2)$ mit $f(\xi)=0$.

Aufgabe 4

a) **i)** Es gilt

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} e^x\cos(2x)\,dx &= \Big[e^x\cos 2x\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x\cdot 2\sin(2x)\,dx = e^{\pi}-1+2\Big[e^x\sin 2x\Big]_0^{\pi} - 4\int_0^{\pi} e^x\cos(2x)\,dx\\ &= e^{\pi}-1-4\int_0^{\pi} e^x\cos(2x)\,dx\,.\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$\int_0^{\pi} e^x\cos(2x)\,dx = \frac{e^{\pi}-1}{5}$$

gilt.

ii) Mit Hilfe der Substitution $y = x^2$, $dy = 2x\,dx$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}\frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}}\,dx &= \frac{1}{2}\int_2^5\frac{y}{\sqrt{y-1}}\,dy = \frac{1}{2}\int_2^5\frac{y-1}{\sqrt{y-1}}\,dy + \frac{1}{2}\int_2^5\frac{1}{\sqrt{y-1}}\,dy\\ &= \frac{1}{2}\Big[\frac{2}{3}(y-1)^{\frac{3}{2}}\Big]_2^5 + \frac{1}{2}\Big[2\sqrt{y-1}\Big]_2^5 = \frac{1}{2}\Big[\frac{2}{3}(8-1)+2(2-1)\Big] = \frac{10}{3}\,.\end{aligned}$$

b) Mittels Zeilenumformungen bringt man $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ auf Zeilennormalform (die Zeilen werden dabei jeweils mit Z_1, Z_2 und Z_3 bezeichnet):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & 2 \\ -8 & 5 & -4 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + 2Z_2 + Z_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_1 \leftrightarrow Z_2} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_1 \to \frac{1}{4}Z_1 + \frac{3}{4}Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{11}{4} \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Man kann nun den (-1)-Ergänzungstrick verwenden, um eine Basis von $\operatorname{Kern} A$ abzulesen:

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{11}{4} \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aus der Dimensionsformel $\dim \operatorname{Bild} A + \dim \operatorname{Kern} A = 4$ folgt,dass $\dim \operatorname{Bild} A = 2$ gilt. Da die zwei Vektoren

$$Ae_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}, \; Ae_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind und beide in $\operatorname{Bild} A$ liegen, ist $\{Ae_1, Ae_2\}$ eine Basis von $\operatorname{Bild} A$.