Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos

Frühjahr 2015
04.03.2015

Modulprüfung / Bachelor

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 (3 + 2 + 5 Punkte)

a) Berechnen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, die der Gleichung

$$z^5 = -\frac{1+3i}{2+i}$$

genügen.

Lösungsvorschlag Es gilt $-\frac{1+3i}{2+i} = -\frac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = -\frac{5+5i}{5} = -1-i$. Deshalb ist die Gleichung äquivalent zu der Gleichung

$$z^5 = -1-i.$$

Aber $-1-i = re^{i\phi}$, wobei $r = |-1-i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ und $\phi = \arctan(\frac{-1}{-1}) - \pi = \arctan(1) - \pi = \frac{-3\pi}{4}$, wobei wir π subtrahiert haben, weil der Realteil und Imaginärteil von $-1-i$ beide negativ sind. Deshalb, ist die Gleichung der Aufgabe äquivalent zu der Gleichung

$$z^5 = \sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}.$$

Also sind die Lösungen der Gleichung

$$z_k = (\sqrt{2})^{\frac{1}{5}} e^{i\frac{-\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{5}} = 2^{\frac{1}{10}} e^{i\frac{-3\pi+8k\pi}{20}}, k = 0,1,2,3,4.$$

b) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to e} \frac{(\ln x)^{\frac{2}{3}}-1}{\sin(x^2-e^2)}$.

Lösungsvorschlag Es gilt

$$\lim_{x\to e} \sin(x^2-e^2) = \sin(0) = 0$$

und

$$\lim_{x\to e} (\ln x)^{\frac{2}{3}} - 1 = (\ln e)^{\frac{2}{3}} - 1 = 0.$$

Da auch

$$\lim_{x\to e} \frac{((\ln x)^{\frac{2}{3}}-1)'}{(\sin(x^2-e^2))'} = \lim_{x\to e} \frac{\frac{2}{3}(\ln x)^{-\frac{1}{3}}(\ln x)'}{\cos(x^2-e^2)(x^2-e^2)'} = \lim_{x\to e} \frac{\frac{2}{3}(\ln x)^{-\frac{1}{3}}\frac{1}{x}}{\cos(x^2-e^2)2x} = \frac{1}{3e^2},$$

und $\cos(x^2-e^2)2x \neq 0$ auf einem Intervall das e enthält gilt, wegen der Regel von de l'Hospital bekommen wir $\lim_{x\to e} \frac{(\ln x)^{\frac{2}{3}}-1}{\sin(x^2-e^2)} = \frac{1}{3e^2}$.

c) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz und absolute Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

Hinweis: Um die absolute Konvergenz zu untersuchen, zeigen Sie, dass

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

Lösungsvorschlag Sei $a_n = 1-\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = 1-\cos(0)=0$, also ist die Folge a_n eine Nullfolge. Wir werden auch zeigen, dass sie eine monoton fallende Folge ist und zwar $a_n \geqslant a_{n+1}$ für alle $n\in\mathbb{N}$. In der Tat, sei $n\in\mathbb{N}$. Dann $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Da aber $\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n+1}} \in [0,1]$ und die cosinus Funktion streng monoton fallend ist in $[0,1]$, bekommen wir $\cos(\frac{1}{\sqrt{n}}) < \cos(\frac{1}{\sqrt{n+1}})$. Also $-\cos(\frac{1}{\sqrt{n}}) > -\cos(\frac{1}{\sqrt{n+1}}) \implies 1-\cos(\frac{1}{\sqrt{n}}) > 1-\cos(\frac{1}{\sqrt{n+1}}) \implies a_n > a_{n+1}$. Deshalb ist a_n eine (eigentlich streng) monoton fallende Nullfolge, und deshalb konvergiert die alternierende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right),$$

nach dem Leibnitz Kriterium.
Bemerkung: die monotonie kann man auch mit Hilfe der Abbleitung der Funktion $g(x) = 1-\cos(\frac{1}{\sqrt{x}}), x>0$ zeigen.
Es gilt $\lim_{x\to 0}(1-\cos(x)) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$. Andererseits

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{2x} = \frac{1}{2},$$

da $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$. Deshalb da $2x\neq 0$ für $x\neq 0$, gilt wegen der Regel von de l'Hospital, $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.
Bemerkung: alternativ, kann man diesen Limes mit Hilfe der Cosinus Reihe berechnen.
Da $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0$, bekommen wir, dass es ein $n_0\in\mathbb{N}$ gibt mit $\frac{1-\cos(\frac{1}{\sqrt{n}})}{(\frac{1}{\sqrt{n}})^2} \geqslant \frac{1}{4}$, für alle $n\geqslant n_0$. Deshalb bekommen wir, $1-\cos(\frac{1}{\sqrt{n}}) \geqslant \frac{1}{4n} \geqslant 0$, für alle $n\geqslant n_0$. Da aber die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergent ist (harmonische Reihe), bekommen wir, aus dem Minorantenkriterium, dass $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos(\frac{1}{\sqrt{n}})\right)$ divergent ist. Aber $\left(1-\cos(\frac{1}{\sqrt{n}})\right) = |(-1)^n\left(1-\cos(\frac{1}{\sqrt{n}})\right)|$ für alle $n\in\mathbb{N}$, da $|\cos(x)|\leqslant 1$ für alle $x\in\mathbb{R}$. Deshalb ist die Reihe der Aufgabe nicht absolut konvergent.

Aufgabe 2 (5 + 5 Punkte)

a) Sei $f:(-\frac{1}{2},\infty)\to\mathbb{R}$, $x\mapsto \ln(1+2x)$.

i) Bestimmen Sie die Zahl $T_1(f,0)(0.1)$ (erstes Taylorpolynom von f um 0 an der Stelle 0.1).

ii) Zeigen Sie, dass

$$|\ln(1.2) - T_1(f,0)(0.1)| \leqslant 0.02.$$

Lösungsvorschlag (i) Es gilt $f(0) = \ln(1) = 0$ und $f'(x) = \frac{2}{1+2x}$. Also $f'(0) = 2$. Da $T(f,0)(x) = f(0) + f'(0)x$ bekommen wir $T(f,0)(x) = 2x$. Daraus folgt

$$T(f,0)(0.1) = 2 \times 0.1 = 0.2.$$

(ii) Da $\ln(1.2) = f(0.1)$ bekommen wir aus dem Satz von Taylor, dass

$$\ln(1.2) - T_1(f,0)(0.1) = R_1(f,0)(0.1),$$

wobei $R_1(f,0)(x) = \frac{f''(\xi)}{2}x^2$, mit $\xi \in (0, 0.1)$. Daraus folgt, dass

$$|\ln(1.2) - T_1(f,0)(0.1)| = |\frac{f''(\xi)}{2}0.1^2|, \text{ wobei } \xi \in (0, 0.1).$$

Da aber $f''(\xi) = -\frac{4}{(1+2\xi)^2}$, bekommen wir

$$|\ln(1.2) - T_1(f,0)(0.1)| = |-\frac{4}{2(1+2\xi)^2}0.01| = \frac{0.02}{(1+2\xi)^2} \leqslant 0.02,$$

wobei der letzte Schritt gilt, weil $\xi \in (0, 0.1)$.

b) Gegeben sei die reelle Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2+(-1)^n}{3} + \frac{1}{n}\right)^n (x-2)^n.$$

i) Berechnen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe.

ii) Ermitteln Sie die Menge aller Punkte $x \in \mathbb{R}$, in denen die Reihe konvergiert.

Lösungsvorschlag (Die Reihe sollte eigentlich, ab $n = 1$ anfangen, weil der Term $n = 0$ nicht definiert ist). (i) Es gilt $R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} c_n}$, wobei $c_n = \sqrt[n]{\left(\frac{2+(-1)^n}{3} + \frac{1}{n}\right)^n}$. Aber $c_n = \sqrt[n]{\left(\frac{2+(-1)^n}{3} + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2+(-1)^n}{3} + \frac{1}{n}$. Deshalb $c_{2n} = \frac{2+(-1)^{2n}}{3} + \frac{1}{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \to 1$, und $c_{2n+1} = \frac{2+(-1)^{2n+1}}{3} + \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n+1} \to \frac{1}{3}$. Aus diesem Grund ist der größte Häufungswert der Folge 1. Daraus folgt, $\limsup c_n = 1$ und deshalb $R = \frac{1}{1} = 1$.
(ii) Da $R = 1$ konvergiert die Reihe, wenn $|x-2| < 1$ und divergiert sie wenn $|x-2| > 1$. Wir betrachten jetzt die Randpunkte. Wir fangen an mit dem Fall $x - 2 = -1$. Der n-te Term der Potenzreihe ist dann $d_n := \left(\frac{2+(-1)^n}{3} + \frac{1}{n}\right)^n (-1)^n$. Da für die Teilfolge d_{2n} gilt $d_{2n} = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} \geqslant 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, bekommen wir, dass d_n keine Nullfolge ist, und deshalb ist die Potenzreihe divergent wenn $x - 2 = -1$. Ähnlich folgt, dass die Potenzreihe divergent ist, wenn $x - 2 = 1$. Aus diesem Grund konvergiert die Potenzreihe, genau dann wenn $|x-2| < 1 \iff x \in (1,3)$.

Aufgabe 3 (3 + 4 + 3 Punkte)

a) Berechnen Sie Minimum und Maximum der Funktion

$$f : [e^{-1}, e^2] \longrightarrow \mathbb{R}\ , x \mapsto \frac{\ln(x^5)}{x}\ .$$

Lösungsvorschlag Es gilt $f(x) = \frac{\ln(x^5)}{x} = 5\frac{\ln(x)}{x}$. Deshalb $f'(x) = 5\frac{(\ln(x))'x - \ln(x)(x)'}{x^2} = 5\frac{1-\ln(x)}{x^2}$. Daraus folgt, $f'(x) = 0 \iff 1 - \ln(x) = 0 \iff x = e$, und da $e \in [e^{-1}, e^2]$

ist e ein Kandidat für das Minimum oder Maximum. Die anderen Kandidaten sind die Endpunkte und zwar e^{-1} und e^2. Wir berechnen jetzt den Wert der Funktion an diesen drei Punkten.

$f(e) = 5\frac{\ln(e)}{e} = \frac{5}{e}$. $f(e^{-1}) = 5\frac{\ln(e^{-1})}{e^{-1}} = -5e$. $f(e^2) = 5\frac{\ln(e^2)}{e^2} = \frac{10}{e^2}$. Der kleinste von den drei Werten ist $-5e$ und der größte $\frac{5}{e}$ (In der Tat, da $e = e^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} > \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} = 2$ gilt $e > 2$ und deshalb $\frac{5}{e} > \frac{10}{e^2}$). Deshalb ist das Minimum der Funktion $-5e$ und das Maximum $\frac{5}{e}$.

b) Berechnen Sie die folgenden Integrale

i) $\int_0^1 x^5\sqrt{1-x^6}\,\mathrm{d}x$.

ii) $\int x\arctan(x)\,\mathrm{d}x$.

Lösungsvorschlag (i) Sei $u(x) = 1-x^6$. Dann $u'(x) = -6x^5$. Also $du = -6x^5dx$ oder $x^5dx = -\frac{du}{6}$. Deshalb $\int_0^1 x^5\sqrt{1-x^6}\,\mathrm{d}x = \int_{u(0)}^{u(1)} \sqrt{u}\frac{-du}{6} = -\frac{1}{6}\int_1^0 \sqrt{u}du = \frac{1}{6}\int_0^1 u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{6}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}|_{u=0}^{u=1} = \frac{1}{6}\frac{2}{3} = \frac{1}{9}$.

(ii) Mit partieller Integration bekommen wir

$$\int x\arctan(x)\,\mathrm{d}x = \int (\frac{x^2}{2})'\arctan(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \int \frac{x^2}{2}(\arctan(x))'\,\mathrm{d}x \implies$$

$$\int x\arctan(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Andererseits $\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$. Also

$$-\frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int 1\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = -\frac{x}{2} + \frac{\arctan(x)}{2} + c, \tag{2}$$

wobei $c \in \mathbb{R}$. Aus (1) und (2) bekommen wir

$$\int x\arctan(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{x}{2} + \frac{\arctan(x)}{2} + c,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$.

c) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ konvergent ist.

Lösungsvorschlag Wir haben

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x,$$

und wir müssen zeigen, dass beide Integrale der rechten Seite konvergent sind.

Auf $[0,1]$ gilt $0 \leqslant \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$. Da aber $\int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}dx$ konvergent ist (weil $\frac{1}{2} < 1$) bekommen wir aus dem Majorantenkriterium, dass $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$ konvergent ist.

Auf $[1,\infty]$ gilt $0 \leqslant \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \leqslant e^{-x}$. Andererseits

$$\int_1^\infty e^{-x}dx = \lim_{s\to\infty}\int_1^s e^{-x}dx = \lim_{s\to\infty} -e^{-x}|_{x=1}^{x=s} = \lim_{s\to\infty}(e^{-1} - e^{-s}) = e^{-1}.$$

Deshalb ist $\int_1^\infty e^{-x}dx$ konvergent. Deshalb folgt aus dem Majorantenkriterium, dass $\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ auch konvergent ist. Es folgt, dass das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$ konvergent ist.

Aufgabe 4 (4 + 6 Punkte)

a) Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

gilt.

Lösungsvorschlag Für $n = 1$ gilt $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \sum_{k=1}^{1} k(k+1)(k+2) = 1\ 2\ 3 = \frac{1\ 2\ 3\ 4}{4} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$. Also stimmt die Aussage für $n = 1$.

Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt. Zu zeigen ist, dass die Aussage für $n+1$ gilt und zwar

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}.$$

In der Tat $\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) + (n+1)(n+2)(n+3)$

$$\overset{\text{Induktionsannahme}}{=} \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + (n+1)(n+2)(n+3)$$

$$\overset{\text{gleicher Nenner}}{=} \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + \frac{4(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3) + 4(n+1)(n+2)(n+3)}{4} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4},$$

was zu zeigen war. Deshalb gilt die Aussage, für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Wir betrachten die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 10 \\ 3 & 6 & 7 & 17 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie Kern$A$ und Bild$A$, sowie die Menge aller Lösungen der Gleichung $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Lösungsvorschlag Mittels Zeilenumformungen, bringen wir die Matrix A auf Zeilennormalform (die Zeilen werden mit Z_1, Z_2, Z_3 bezeichnet).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 10 \\ 3 & 6 & 7 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - 3Z_1]{Z_2 \to Z_2 - 2Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - 2Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_2 \to \frac{1}{2}Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 \to Z_1 - Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe des -1 Ergänzungstricks bekommen wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Also ist

$$KernA = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\\-1\end{pmatrix}\right\}.$$

Da $\dim \mathrm{Kern}A + \dim \mathrm{Bild}A = 4$ (4 ist die Anzahl der Spalten der Matrix A) bekommen wir, dass $\dim \mathrm{Bild}A = 2$. Aber das Bild von A ist der lineare Aufspann der Spalten von A, und da die erste und dritte Spalte von A linear unabhängig sind [1], bekommen wir

$$\mathrm{Bild}A = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}\right\}.$$

Um die Lösungsmenge der inhomogenen Gleichung $A\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ zu bestimmen, beobachten wir, dass die rechte Seite der Gleichung einfach die erste Spalte von A ist. Deshalb ist

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

eine Lösung der inhomogenen Gleichung. Es folgt, dass die Menge aller Lösungen der inhomogenen Gleichung ist

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \mathrm{Kern}A = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\\2\\-1\end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R}\right\}.$$

[1] in der Tat sei $a(1,2,3) + b(1,4,7) = 0$. Dann $(a+b, 2a+4b, 3a+7b) = (0,0,0)$. Aber $a + b = 0, 2a + 4b = 0 \implies a = b = 0$. Also sind die Vektoren linear unabhängig