Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2015/16
07.03.2016

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Bachelor-Modulprüfung

Aufgabe 1: ((2 + 2) + 6 Punkte)

(a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv durch

$$a_1 := \sqrt{6}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

definiert.

(i) Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton und beschränkt durch 6 ist.

(ii) Konvergiert die Folge? Bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

(b) Sei $D = \mathbb{R} \setminus (-2, 2]$ und die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ sei durch

$$f(x) = \frac{2\sqrt{x^2 - 4}}{x}$$

gegeben. Bestimmen Sie den Wertebereich $f(D)$ von f. Zeigen Sie, dass f eine Umkehrfunktion $f^{-1}\colon f(D) \to D$ besitzt. Berechnen Sie f^{-1} und untersuchen Sie f^{-1} auf Stetigkeit.

Aufgabe 2: (3 + (3 + 4) Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit

$$\left|\frac{z-3}{z-2}\right| \geq 1.$$

(b) Die Potenzreihe $P(x)$ sei durch

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 2n}{n+1}\, x^n$$

definiert.

(i) Bestimmen Sie die Menge D aller $x \in \mathbb{R}$, für welche die Potenzreihe $P(x)$ konvergiert.

(ii) Zeigen Sie, dass für alle $x \in D$ die folgende Gleichung gilt

$$x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 2n}{n+1}\, x^n = \frac{x}{(1-x)^2} + \ln(1-x).$$

Hinweis: Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung für $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)$.

— **Bitte wenden!** —

Aufgabe 3: (4 + (2 + 2 + 2) Punkte)

(a) Untersuchen Sie, ob der folgende Grenzwert existiert. Berechnen Sie diesen gegebenenfalls:

$$\lim_{x \to 0} \frac{5x - \tan(5x)}{x^3}.$$

(b) Untersuchen Sie, ob die folgenden Integrale existieren. Berechnen Sie diese gegebenenfalls:

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{x}\, dx.$

(ii) $\displaystyle\int_1^e \frac{\sin\big(\pi \ln(x)\big)}{x}\, dx.$

(iii) $\displaystyle\int_0^\infty (1+2x)e^{-x}\, dx.$

Aufgabe 4: (4 + 2 + 4 Punkte)
Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2. Die lineare Abbildung $\phi : V \to V$ sei durch

$$\phi(p) = 2p'$$

gegeben, wobei p' die erste Ableitung von p bezeichne.

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix F von ϕ bzgl. der Standardbasis $e_1(x) = 1$, $e_2(x) = x$, $e_3(x) = x^2$ im Argument- und Zielraum. Bestimmen Sie Bild F, Kern F sowie Rang F. Begründen Sie Ihre Antworten.

(b) Zeigen Sie, dass $b_1(x) = 2 + 3x + 2x^2$, $b_2(x) = 2x + x^2$, $b_3(x) = 2 + 2x + 2x^2$ eine Basis von V bilden.

(c) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix A von ϕ bzgl. der Basis $b_1(x)$, $b_2(x)$, $b_3(x)$ im Argument- und Zielraum.

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:

Die Klausurergebnisse finden Sie ab **21.04.2016** unter

http://www.math.kit.edu/iana1/

Die Klausureinsicht findet am Donnerstag, dem **28.04.2016**, von 16 bis 18 Uhr im Hörsaal am Fasanengarten (Geb.50.35) statt.
Die müdlichen Nachprüfungen sind in der Woche vom **02.05.2016** bis **06.05.2016**.