Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2015/16
07.03.2016

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Bachelor-Modulprüfung
Lösungsvorschläge

Aufgabe 1:

(a) (i) Zunächst zeigen wir mittels vollständiger Induktion, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist:
IA: Wegen

$$a_2 = \sqrt{6+a_n} = \sqrt{6+\sqrt{6}} > \sqrt{6} = a_1$$

stimmt die behauptete Aussage.
IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte die Behauptung, sei also $a_{n+1} \geq a_n$. (IV)
Dann folgt

$$a_{n+2} = \sqrt{6+a_{n+1}} \overset{\text{(IV)}}{\geq} = \sqrt{6+a_n} = a_{n+1}.$$

Als Nächstes zeigen wir, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt durch 6 ist. Wir verwenden wieder vollständige Induktion:
IA: Für $n = 1$ stimmt die behauptete Aussage, denn $a_1 = \sqrt{6} < 6$.
IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte die Behauptung, also $a_n \leq 6$. (IV)
Es gilt

$$a_{n+1} = \sqrt{6+a_n} \overset{\text{(IV)}}{\leq} \sqrt{6+6} = \sqrt{2\cdot 6} \leq \sqrt{6\cdot 6} = 6.$$

(ii) In (i) wurde gezeigt, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt ist. Nach Satz in 6.4. der Vorlesung ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ für ein $a \in \mathbb{R}$. Ferner gilt

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{6+a_n} = \sqrt{6 + \lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{6+a}.$$

Auflösen nach a liefert

$$a^2 = 6 + a \quad \iff \quad a \in \{-2, 3\}.$$

Da offensichtlich $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ist $a = 3$ der gesuchte Grenzwert.

(b) Da

$$f'(x) = \frac{\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-4}} - 2\sqrt{x^2-4}}{x^2} = \frac{8}{x^2\sqrt{x^2-4}} > 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus (-2, 2],$$

ist die Funktion f streng monoton wachsend in $(-\infty,-2] \cup (2,\infty)$. Dann ist

$$\begin{aligned} f(D) &= f\big((-\infty,-2] \cup (2,\infty)\big) = f\big(((-\infty,-2]\big) \cup f\big((2,\infty)\big) \\ &\overset{f \text{ stetig und streng monoton wachsend}}{=} \Big(\lim_{x\to-\infty} f(x), f(-2)\Big] \cup \Big(f(2), \lim_{x\to\infty} f(x)\Big) \\ &= (-2,0] \cup (0,2) = (-2,2). \end{aligned}$$

Für $y \in (0,2)$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) = y \quad &\iff \quad \frac{2\sqrt{x^2-4}}{x} = y \\ &\iff \quad \sqrt{x^2-4} = \frac{xy}{2} \\ &\iff \quad x^2 - 4 = \frac{x^2y^2}{4} \\ &\iff \quad x^2(4-y^2) = 16 \\ &\overset{x>2}{\iff} \quad x = \frac{4}{\sqrt{4-y^2}} \end{aligned}$$

und für $y \in (-2,0]$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) = y \quad &\iff \quad \frac{2\sqrt{x^2-4}}{x} = y \\ &\iff \quad \sqrt{x^2-4} = \frac{xy}{2} \\ &\iff \quad x^2 - 4 = \frac{x^2y^2}{4} \\ &\iff \quad x^2(4-y^2) = 16 \\ &\overset{x\leq 2}{\iff} \quad x = \frac{-4}{\sqrt{4-y^2}}. \end{aligned}$$

Insgesamt ist

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{4-y^2}} & \text{für } 0 < y < 2, \\ \frac{-4}{\sqrt{4-y^2}} & \text{für } -2 < y \leq 0. \end{cases}$$

Die Umkehrfunktion f^{-1} ist als Komposition stetiger Funktionen stetig auf $(-2,2) \setminus \{0\}$. Wegen

$$\lim_{y\to 0^+} f^{-1}(y) = 2 \neq -2 = \lim_{y\to 0^-} f^{-1}(y)$$

ist f^{-1} unstetig in 0.

Aufgabe 2:

(a) Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Für $z \neq 2$ gilt

$$\begin{aligned}\left|\frac{z-3}{z-2}\right| \geq 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad |z-3| \geq |z-2| \\ &\Longleftrightarrow \quad |z-3|^2 \geq |z-2|^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad (x-3)^2 + y^2 \geq (x-2)^2 + y^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad x \leq \frac{5}{2},\end{aligned}$$

d.h.

$$\left|\frac{z-3}{z-2}\right| \geq 1 \quad \text{für alle } z \neq 2 \text{ mit } \operatorname{Re} z \leq \frac{5}{2}.$$

(b) (i) Sei $a_n := \frac{n^2+2n}{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$. Da $a_n \neq 0\, \forall n \in \mathbb{N}$, können wir versuchen, den Konvergenzradius R der gegebenen Potenzreihe mit Hilfe des Satzes 7.15 (Folgerung aus dem Quotientenkriterium) zu bestimmen. Es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+2(n+1)}{(n+1)+1}\cdot\frac{n+1}{n^2+2n} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^3+5n^2+7n+3}{n^3+4n^2+4n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}+\frac{3}{n^3}}{1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}} = 1.\end{aligned}$$

Folglich ist $R = 1^{-1} = 1$, d.h. die Reihe $P(x)$ konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$. Für $|x| = 1$ ist die Reihe $P(x)$ divergent, da

$$\begin{aligned}\left|\frac{n^2+2n}{n+1}\right||x|^n = \left|\frac{n^2+2n}{n+1}\right| &= \left|n+1-\frac{1}{n+1}\right| \\ &\geq n+1-\frac{1}{n+1} \nrightarrow 0 \quad \text{für } n\to\infty.\end{aligned}$$

Insgesamt konvergiert die Reihe $P(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$.

(ii) Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt

$$\begin{aligned}x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+2n}{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+2n}{n+1}x^{n+1} &\overset{m=n+1}{=} \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(m-1)^2+2(m-1)}{(m-1)+1}x^m \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^2-1}{m}x^m = \sum_{m=1}^{\infty}mx^m - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}x^m.\end{aligned}$$

Nach dem Hinweis bestimmen wir die Potenzreihenentwicklung für $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)$. Es ist

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad \text{für alle } x \in R \text{ mit } |x| < 1.$$

Folglich ist für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}.$$

Damit ist

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n = x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1} = x\cdot\frac{1}{(1-x)^2}.$$

Ferner ist nach Vorlesung (siehe Abschnitt 11.16)

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n.$$

Deshalb gilt

$$x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+2n}{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = \frac{x}{(1-x)^2} + \ln(1-x).$$

Aufgabe 3:

(a) Die Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_1(x) = 5x - \tan(5x) \qquad \text{und} \qquad f_2(x) = x^3$$

sind differenzierbar und es gilt $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = \lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = 0$. Ferner ist $f_1'(x) = 5 - \frac{5}{\cos^2(x)} = -5\tan^2(5x)$ und $f_2'(x) = 3x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für alle $x \neq 0$ gilt $f_2'(x) \neq 0$. Folglich gilt nach der Regel von l'Hospital (vgl. Abschnitt 11.9):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{5x - \tan(5x)}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-5\tan^2(5x)}{3x^2} \\ &= -\frac{125}{3} \underbrace{\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(5x)}{5x}\right)^2}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos^2(5x)}}_{=1} = -\frac{125}{3}.\end{aligned}$$

(b) (i) Für alle $x \geq 0$ gilt

$$\frac{e^x}{x} \geq \frac{1}{x}.$$

Da das uneigentliche Integral $\int\limits_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ divergiert, ist $\int\limits_0^1 \frac{e^x}{x}\,dx$ nach dem Minorantenkriterium divergent.

(ii) Für $x \in [1, e]$ ist die Funktion $\frac{\sin\left(\pi \ln(x)\right)}{x}$ als Komposition stetiger Funktionen stetig und somit integrierbar. Mit der Substitution $t = \ln(x)$, $dt = \frac{1}{x}dx$ gilt

$$\int_1^e \frac{\sin\left(\pi\ln(x)\right)}{x}\,dx = \int_0^1 \sin(\pi t)dt = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi t)\Big|_{t=0}^{1} = \frac{2}{\pi}.$$

(iii) Fur beliebiges $r > 0$ erhalten wir mittels partieller Integration

$$\begin{aligned}\int_0^r (1+2x)e^{-x}dx &= -(1+2x)e^{-x}|_{x=0}^r + \int_0^r 2e^{-x}dx \\ &= -(1+2r)e^{-r} + 1 - 2e^{-x}\Big|_{x=0}^r \\ &= -2re^{-r} - 3e^{-r} + 3.\end{aligned}$$

Fur $r \to \infty$ strebt dies gegen 3. Das uneigentliche Integral konvergiert also und es gilt

$$\int_0^\infty (1+2x)e^{-x}dx = 3.$$

Aufgabe 4:

(a) Da

$$\begin{aligned}
\phi(e_1) &= 2 \cdot 0 = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3,\\
\phi(e_2) &= 2 \cdot 1 = 2 = 2e_1 + 0e_2 + 0e_3,\\
\phi(e_3) &= 2 \cdot 2x = 4x = 0e_1 + 4e_2 + 0e_3,
\end{aligned}$$

ist die Darstellungsmatrix F von ϕ bzgl. der Standardbasis e_1, e_2, e_3 im Argument- und Zielraum durch

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.
Um den Kern F zu bestimmen, bringen wir die Matrix F auf ihre Zeilennormalform:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid \frac{1}{2} \\ \mid \frac{1}{4} \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe des (-1)-Ergänzungstricks lesen wir ab

$$\operatorname{Kern} F = \{x \in \mathbb{R}^3 : Fx = 0\} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ferner erkennen wir an der Zeilennormalform von F, dass zweite und dritte Spalte von F linear unabhängig sind, und folglich

$$\operatorname{Bild} F = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Per Definition ist

$$\operatorname{Rang} F = \dim \operatorname{Bild} F = 2.$$

(b) Um $b_1(x), b_2(x), b_3(x)$ auf lineare Unabhängigkeit zu prüfen, schreiben wir $b_1(x), b_2(x), b_3(x)$ als Zeilen in eine Matrix und bringen diese durch Zeilenumformungen auf ihre Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-\frac{3}{2}) \ \cdot(-1) \\ + \\ + \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot(-\frac{1}{2}) \\ + \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Da es in der letzten Matrix keine Nullzeile gibt, sind $b_1(x), b_2(x), b_3(x)$ linear unabhängig. Wegen $\dim V = 3$ bilden $b_1(x), b_2(x), b_3(x)$ eine Basis von V.

(c) Zunächst bestimmen wir die Darstellungsmatrix B von id bzgl. der Basis $b_1(x), b_2(x), b_3(x)$ im Argumentraum und Standardbasis $e_1(x), e_2(x), e_3(x)$ im Zielraum:

$$\begin{aligned}
\operatorname{id}(b_1) &= 2 + 3x + 2x^2 = 2e_1 + 3e_2 + 2e_3,\\
\operatorname{id}(b_2) &= 2x + x^2 = 0e_1 + 2e_2 + 1e_3,\\
\operatorname{id}(b_3) &= 2 + 2x + 2x^2 = 2e_1 + 2e_2 + 2e_3,
\end{aligned}$$

d.h. die Darstellungsmatrix B ist durch

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

gegeben.
Wir invertieren B (vgl. mit Abschnitt 15.16):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-\tfrac{3}{2}) \quad \cdot(-1) \\ + \\ + \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid \tfrac{1}{2} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-2) \\ + \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mid(-1) \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 2 \end{array}\right),$$

d.h.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nach Abschnitt 15.16 ist die Darstellungsmatrix A von ϕ bzgl. der Basis $b_1(x), b_2(x), b_3(x)$ im Argument- und Zielraum durch

$$A = B^{-1}FB = \begin{pmatrix} 14 & 8 & 12 \\ -6 & -4 & -4 \\ -11 & -6 & -10 \end{pmatrix}$$

gegeben.