Karlsruhe Institut für Technologie (KIT) 07.03.2017
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos

Modulklausur / Bachelor

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Aufgabe 1 (4 + 2 + 4 Punkte)

a) Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil der Zahl

$$z = \left(-\sqrt{3} + 3i\right)^{13}.$$

b) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos(x))}{e^{\cos(x)} - e}$.

c) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)^2 2^k = \left(n^2 + 2\right) 2^{n+1} - 3.$$

Aufgabe 2 (3 + 4 + 3 Punkte)

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Taylor, dass

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \forall x \leqslant 0.$$

Bestimmen Sie ein $n \in \mathbb{N}$ so klein wie möglich, so dass $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ den Wert e^{-1} mit Fehler kleiner als 0,01 approximiert.

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der komplexen Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{5 + i^n}{12} \right)^n (z+i)^n \right].$$

Konvergiert die Reihe für $z = \sqrt{2}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Bestimmen Sie alle $a, b \in \mathbb{R}$ für die die Zeilen der Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & a+1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & b & 2 \end{pmatrix}$$

linear abhängig sind.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (3 + 4 + 3 Punkte)

a) Sei $f : [1,3] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = (x^2 - 2x - 2)\, e^x$. Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum von f.

b) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz und absolute Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos(n\pi)}{n^2 + n + 1}.$$

c) Sei $a_n = \int_0^\pi x^{2n} \sin(x) dx$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Zeigen Sie mittels partieller integration, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n = \pi^{2n} - 2n(2n-1)a_{n-1}$.

Aufgabe 4 (4 + 4 + 2 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Inverse der Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

b) Wir betrachten $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt. Bestimmen Sie mit Hilfe des Gram-Schmidt Verfahrens eine Orthonormalbasis von $\operatorname{lin}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$, wobei

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

c) Berechnen Sie das Integral $\int_1^8 \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)} \mathrm{d}x$.

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:

Die Klausurergebnisse liegen ab **27.04.2017** unter `http://www.math.kit.edu/iana1/` im Internet.

Die Klausureinsicht findet am Donnerstag, den **04.05.2017**, von 16 bis 18 Uhr im Hörsaal neue Chemie (Geb. 30.46) statt.

Die müdlichen Nachprüfungen sind in der Woche vom **08.05.2017** bis **12.05.2017**.