

$$1a) \quad |-\sqrt{3} + 3i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

Also $-\sqrt{3} + 3i = 2\sqrt{3} e^{i\varphi}$, wobei

$$\varphi = \arctan\left(\frac{3}{-\sqrt{3}}\right) + \pi = \arctan(-\sqrt{3}) + \pi =$$

↓
weil $-\sqrt{3} < 0$

$$\varphi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\text{Also } z = (-\sqrt{3} + 3i)^{13} = \left(2\sqrt{3} e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{13} =$$

$$= (2\sqrt{3})^{13} e^{i\frac{26\pi}{3}} = (2\sqrt{3})^{13} \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$\left(\begin{aligned} &= \underbrace{e^{i\frac{24\pi}{3}}}_{= e^{i8\pi} = 1} e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \right)$$

Deshalb $\operatorname{Re} z = (2\sqrt{3})^{13} \left(-\frac{1}{2}\right) = -2^{12} (\sqrt{3})^{13}.$

$$\operatorname{Im} z = (2\sqrt{3})^{13} \frac{\sqrt{3}}{2} = 2^{12} 3^7.$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x))}{e^{\cos(x)} - e} = \frac{0}{0}.$$

Abet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(\cos(x)))'}{(e^{\cos(x)} - e)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos(x)} (-\sin(x))}{(-\sin(x)) e^{\cos(x)}} = \frac{1}{e}.$$

da $\cos(0)=1$. Also nach 1^{er} Hospital
ist $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x))}{e^{\cos(x)} - e} = \frac{1}{e}$.

(c) Für $n=0$ ist

$$\sum_{k=0}^0 (k+1)^2 2^k = (0+1)^2 2^0 = 1$$

und $(0^2+2)2^{0+1}-3 = 4-3=1$. Also stimmt die Aussage für $n=0$.

Annahme $\sum_{k=0}^n (k+1)^2 2^k = (n^2+2)2^{n+1}-3$ (*)
für ein $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{z.z. } \sum_{k=0}^{n+1} (k+1)^2 2^k = ((n+1)^2+2)2^{n+2}-3$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} (k+1)^2 2^k = \sum_{k=0}^n (k+1)^2 2^k + (n+2)^2 2^{n+1}$$

$$\stackrel{(*)}{=} (n^2+2)2^{n+1}-3 + (n+2)^2 2^{n+1}$$

$$= [n^2+2 + (n+2)^2] 2^{n+1} - 3 = (2n^2+4n+6)2^{n+1}-3$$

$$= (n^2+2n+3)2^{n+2}-3 = ((n+1)^2+2)2^{n+2}-3$$

Also stimmt die Aussage $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$(2a). \text{ Taylor } \Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

mit ξ zwischen 0, x. Da

$$f^{(k)}(x) = e^x \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad f^{(k)}(0) = e^0 = 1$$

bekommen wir

$$e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = \frac{e^{\xi} x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow \left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| = e^{\xi} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

weil $x \leq 0$ und ξ zwischen 0, x also $\xi \leq 0$
also $e^{\xi} \leq 1$.

$$\text{Da } \left| e^{-1} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right| \leq \frac{|-1|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!}$$

ist der Fehler $< 0,01$ wenn $(n+1)! > 100$.

Da $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$ wäre $n = 4$
das gesuchte n .

Bem (unnötig): Wenn $n \leq 3$ $\left| e^{-1} - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}$

weil ξ zwischen 0, -1
also $\xi \geq -1$

$$\geq \frac{e^{-1}}{4!} > \frac{1}{3 \cdot 24} = \frac{1}{72} > \frac{1}{100}$$

Dieser Teil wird nicht verlangt

weil $e^{-1} > \frac{1}{3}$

Also wenn $n \geq 3$ ist der Fehler tatsächlich $> \frac{1}{100}$.

$$(b) \sqrt[n]{|a_n|} = \left| \frac{5+i^n}{12} \right| = \begin{cases} \frac{6}{12}, & n=4k, k \in \mathbb{N} \\ \frac{|5+i|}{12}, & n=4k+1, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ \frac{4}{12}, & n=4k+2, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ \frac{|5-i|}{12}, & n=4k+3, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{cases}$$

Also $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ (größte Häufungswert von $\sqrt[n]{|a_n|}$) da $|5+i| \leq |5|+|i| \leq 6$ und ähnlich $|5-i| \leq 6$ Also

$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = 2$. Da $|z+i| = \sqrt{3} < 2 = R$ wenn $z = \sqrt{2}$ konvergiert die Reihe für $z = \sqrt{2}$

$$(c) \quad A \quad \begin{array}{l} \underline{z_2 \rightarrow z_2 - 2z_1} \\ \underline{z_3 \rightarrow z_3 - 2z_1} \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & a-1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & b & 4 \end{pmatrix}$$

Also die Zeilen sind l.a. $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a-1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ b \\ 4 \end{pmatrix}$ sind genau parallel (weil dann die nächste Anforderung gibt eine Zeile die Null ist). Aus der dritten Komponente der Vektoren folgt $2(a-1, 2, 2) = (-1, b, 4) \Rightarrow b=4$ und $2(a-1) = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$.

$$\underline{3a)} \quad f'(x) = (x^2 - 2x - 2)'e^x + (x^2 - 2x - 2)(e^x)'$$

$$= [(2x - 2) + (x^2 - 2x - 2)]e^x = (x^2 - 4)e^x. \text{ Also}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2. \text{ Da } -2 \notin [1, 3] \text{ w\u00e4hlen wir nur den kritischen Punkt } x = 2, \quad f(2) = (2^2 - 2 \cdot 2 - 2)e^2 = -2e^2.$$

$$\text{Endpunkte: } 1 \rightsquigarrow f(1) = (1 - 2 - 2)e = -3e.$$

$$3 \rightsquigarrow f(3) = (3^2 - 2 \cdot 3 - 2)e^3 = e^3.$$

$$\text{Also } \max f = \max \{-2e^2, -3e, e^3\} = e^3$$

$$\min f = \min \{-2e^2, -3e, e^3\} = -2e^2.$$

(3b) Da $\cos(n\pi) = (-1)^n$ lautet die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n (-1)^n}{n^2 + n + 1}. \text{ Leibniz: } a_n = \frac{n}{n^2 + n + 1} \rightarrow 0$$

und a_n ist monoton fallend da $a_n = \frac{1}{n + \frac{1}{n} + 1}$

und $n + \frac{1}{n}$ ist monoton wachsend, weil

$$\left(n + 1 + \frac{1}{n+1}\right) > n + 1 > n + \frac{1}{n}, \text{ Also ist } a_n \text{ monoton}$$

fallende Nullfolge. Leibniz $\Rightarrow$ Reihe konvergiert.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n(-1)^n}{n^2+n+1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+n+1}$$

$$\text{Da } \frac{n}{n^2+n+1} \geq \frac{n}{n^2+n^2+n^2} = \frac{1}{3n}$$

und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$ divergiert (harmonische Reihe) divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+n+1}$ nach dem Minorantenkriterium. Also konvergiert die Reihe nicht absolut

$$(\text{C}) a_n = \int_0^{\pi} x^{2n} \sin(x) dx = - \int_0^{\pi} x^{2n} (\cos(x))' dx$$

$$= - x^{2n} \cos(x) \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} (x^{2n})' \cos(x) dx$$

$$= -\pi^{2n} \cos(\pi) + 0 + 2n \int_0^{\pi} x^{2n-1} \cos(x) dx$$

$$= \pi^{2n} + 2n \int_0^{\pi} x^{2n-1} (\sin(x))' dx$$

$$= \pi^{2n} + 2n \left[\underbrace{x^{2n-1} \sin(x) \Big|_0^{\pi}}_{=0 \text{ weil } \sin(0)=\sin(\pi)=0} - \int_0^{\pi} (x^{2n-1})' \sin(x) dx \right]$$

$$= \pi^{2n} - 2n(2n-1) \int_0^{\pi} x^{2n-2} \sin(x) dx$$

$$= \pi^{2n} - 2n(2n-1) a_{n-1}$$

$$(4a) \quad (B|I) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} z_2 \rightarrow z_2 - 2z_1 \\ z_3 \rightarrow z_3 - 2z_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} z_1 \rightarrow z_1 - z_2 \\ z_3 \rightarrow \frac{z_3}{2} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} z_1 \rightarrow z_1 - z_3 \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \\ = B^{-1}$$

$$(b) \quad \|\vec{v}_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \Rightarrow \vec{b}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c}_2 = \vec{v}_2 - (\vec{v}_2 \cdot \vec{b}_1) \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

= 4

$$\text{Aber } \|\vec{c}_2\| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{Also } \vec{b}_2 = \frac{\vec{c}_2}{\|\vec{c}_2\|} = \frac{1}{2} \vec{c}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c}_3 = \vec{v}_3 - \left(\frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{b}_1}{\|\vec{b}_1\|^2} \right) \vec{b}_1 - \left(\frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{b}_2}{\|\vec{b}_2\|^2} \right) \vec{b}_2$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\quad \quad \quad = 2 \quad \quad \quad = 0$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}_3 = \frac{\vec{c}_3}{\|\vec{c}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{2})^2 + 1^2 + 2^2}} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die gesuchte ONB ist also $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$.

c) $I = \int_1^8 \frac{1}{x^{\frac{1}{3}} (1+x^{\frac{2}{3}})} dx$ $\frac{3}{2} du$

$u = 1 + x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow du = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} dx$

Also $\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} dx = \frac{3}{2} du$ Also $I = \int_{1+1^{\frac{2}{3}}}^{1+8^{\frac{2}{3}}} \frac{3}{2} \frac{du}{u} =$

$$= \int_2^5 \frac{3}{2u} du = \frac{3}{2} \ln u \Big|_2^5 = \frac{3}{2} \ln \frac{5}{2}$$