Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. W. Reichel

Frühjahr 2018
09.03.2018

Modulprüfung / Bachelor
Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Aufgabe 1 (3 + 3 + 4 Punkte)

a) Berechnen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, die der Gleichung

$$z^4 + 3z^2 - 4 = 0$$

genügen.

b) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \geqslant 3$ gilt:

$$n > 1 + \sqrt{n}$$

c) Bestimmen Sie die Grenzwerte:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^3 + n\ln n} - n^{\frac{3}{2}})$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{e^x - e^{-x}}$

Aufgabe 2 (2 + 5 + 3 Punkte)

a) Untersuchen Sie die Reihe auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{4}\cos^2 n\right)$$

b) Gegeben sei die reelle Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3 + (-1)^n}{2}\right)^n (x-1)^n.$$

i) Berechnen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe.

ii) Ermitteln Sie die Menge aller Punkte $x \in \mathbb{R}$, in denen die Reihe konvergiert.

c) Wählen Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x > 0 \\ \alpha, & x = 0 \\ \beta e^{-x}, & x < 0\,, \end{cases}$$

auf $\mathbb{R}$ stetig ist.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (3 + 3 + 4 Punkte)

a) Berechnen Sie Minimum und Maximum der Funktion

$$f : \begin{cases} [1,3] & \to & \mathbb{R}\,, \\ x & \mapsto & x + \frac{4}{x}\,. \end{cases}$$

b) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

i)

$$\int_0^1 \frac{4x+3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

ii)

$$\int_0^\pi x^2 \sin(x)\,\mathrm{d}x$$

c) Zeigen die Konvergenz der uneigentlichen Integrale:

i)

$$\int_1^\infty \frac{\sin(2x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

ii)

$$\int_1^\infty \frac{\cos(2x)}{x}\,\mathrm{d}x$$ **Hinweis:** Partielle Integration

Aufgabe 4 (4 + 6 Punkte)

a) Verwenden Sie die Taylor-Formel, um zu zeigen dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|\cos x - \big(1 - \frac{1}{2}x^2\big)| \leqslant \frac{1}{4!}x^4$$

b) Betrachten Sie die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & 9 \\ 8 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie Kern(A) und alle Lösungen des Systems $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ für $\overrightarrow{b} = (9, 20, -3)^T$.

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:

Die **Ergebnisse** der Modulprüfung werden am Dienstag, den **17.04.2018**, neben dem Zimmer 2.027 (Geb. 20.30) veröffentlicht.
Die **Einsichtnahme** in die korrigierten Modulprüfungen findet am Donnerstag, den **19.04.2018**, von **16 bis 18 Uhr** im **Hörsaal am Fasanengarten (Geb. 50.35)** statt.
Die **mündlichen Nachprüfungen** finden in der Woche vom **23.04.2018** bis **27.04.2018** statt.