Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof.Dr. W. Reichel

Frühjar 2018
09.03.2018

Modulprüfung / Bachelor

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

a) Es gilt $z^4 + 3z^2 - 4 = (z^2 + 4)(z^2 - 1)$. Deshalb gilt es entweder $z^2 = -4$ oder $z^2 = 1$. Die Lösungen der Gleichung sind

$$z_{1,2} = 2e^{i(\frac{\pi}{2}+\pi k)}, \quad z_{3,4} = e^{i\pi k}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

b) Für $n = 3$ gilt $2 > \sqrt{3}$ und $3 = 2 + 1 > \sqrt{3} + 1$. Also stimmt die Aussage für $n = 3$.

Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$ gilt. Zu zeigen ist, dass die Aussage für $n + 1$ gilt und zwar

$$(n + 1) \geqslant \sqrt{(n + 1)} + 1.$$

Nach der Induktionsannahme gilt für $n > 3$

$$(n + 1) > \sqrt{n} + 1 + 1 > \sqrt{n + 1} + 1$$

Deshalb gilt die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) **(i)** Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^3 + n \ln n} - n^{\frac{3}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + n \ln n - n^3}{\sqrt{n^3 + n \ln n} + n^{\frac{3}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \ln n}{2n^{\frac{3}{2}}} = 0\,.$$

(ii) Nach der Regel von de l'Hospital gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{2e^x} = 0.$$

Aufgabe 2

a) Die Reihe ist nicht konvergent, weil

$$a_n = (-1)^n \Big(1 - \frac{1}{4} \cos^2 n\Big)\,.$$

keine Nullfolge ist.

b) (i) Es gilt $R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} c_n}$, wobei $c_n = \sqrt[n]{\left(\frac{3+(-1)^n}{2}\right)^n} = \frac{3+(-1)^n}{2}$. Offensichtlich gilt $c_{2n} \to 2$, und $c_{2n+1} \to 1$. Der größte Häufungswert der Folge ist 2. Daraus folgt, dass $\limsup c_n = 2$ und deshalb $R = \frac{1}{2}$.

(ii) Da $R = \frac{1}{2}$ konvergiert die Reihe, wenn $|x-1| < \frac{1}{2}$ und divergiert sie wenn $|x-1| > \frac{1}{2}$. Wir betrachten jetzt die Randpunkte. Wir fangen mit dem Fall $x = \frac{1}{2}$ an. Der n-te Term der Potenzreihe ist dann $d_n := \left(\frac{3+(-1)^n}{2}\right)^n (-\frac{1}{2})^n$. Da für die Teilfolge d_{2n} gilt $|d_{2n}| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, bekommen wir, dass d_n keine Nullfolge ist, und deshalb ist die Potenzreihe divergent. Ähnlich folgt, dass die Potenzreihe divergent ist, wenn $x - 1 = \frac{1}{2}$. Aus diesem Grund konvergiert die Potenzreihe, genau dann wenn $|x-1| < \frac{1}{2} \iff x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

c) Die Funktion f ist stetig, wenn $\lim_{x\to 0-} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0+} f(x)$. Da gilt $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ und $\lim_{x\to 0} e^{-x} = 1$, diese Bedingung ist erfült genau dann, wenn $\beta = 1$ und $\alpha = 1$ ist.

Aufgabe 3

a) Es gilt $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = 0 \iff x^2 - 4 = 0 \iff x = \pm 2$. Offensichtlich $x = 2$ ist ein Kandidat für das Minimum oder Maximum, dagegen $x = -2$ kein Kandidat für das Minimum oder Maximum ist, weil $-2 \notin [1,3]$ gilt. Wir berechnen nun die Werte der Funktion an drei Stellen : $x = 1,\ x = 2,\ x = 3$. Es gilt $f(1) = 5\,,\ f(2) = 4\,,$ $f(3) = \frac{13}{3}$. Der kleinste von den drei Werten ist 4 und der grösster Wert ist 5. Deshalb das Minimum der Funktion ist 4 und das Maximum ist 5.

b) **i)** Für $y = x^2 + 1$ gilt

$$\int_0^1 \frac{4x+3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y + 3 \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$2 \ln y \Big|_1^2 + 3 \arctan x \Big|_0^1 = 2 \ln 2 + \frac{3}{4}\pi\,.$$

ii) Mit der partiellen Integration bekommen wir

$$\int_0^\pi x^2 \sin(x)\,\mathrm{d}x = -x^2 \cos x \Big|_0^\pi + \int_0^\pi 2x \cos x\,\mathrm{d}x = -\pi^2(-1) + 2x \sin x \Big|_0^\pi - 2 \int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x =$$

$$\pi^2 + 0 + 2 \cos x \Big|_0^\pi = \pi^2 - 4.$$

c) **(i)** Aus der Übung wissen wir, dass das Integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ konvergent ist. Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $|\sin 2x| \leqslant 1$. Nach Majoranten Kriterium konvergiert das Integral $\int_1^\infty \frac{\sin(2x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$

(ii) Wir müssen zeigen, dass $\lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{\cos(2x)}{x}\mathrm{d}x$ existiert. Es gilt

$$\lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{\cos(2x)}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty} \left[\frac{\sin(2x)}{2x}\Big|_1^a + \frac{1}{2} \int_1^a \frac{\sin(2x)}{x^2}\,\mathrm{d}x \right] = -\frac{\sin(2)}{2} + \frac{1}{2} \lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{\sin(2x)}{x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Nach i) konvergiert das Integral $\int_1^\infty \frac{\sin(2x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ und damit existiert auch das Integral $\int_1^\infty \frac{\sin(2x)}{x^2}\,\mathrm{d}x\,.$

Aufgabe 4

a) Es gilt $f'(x) = -\sin x,\ f''(x) = -\cos x,\ f'''(x) = \sin x,\ f''''(x) = \cos x$. Also $f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = -1, f'''(0) = 0$ und $|f''''(\xi)| \leqslant 1$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$. Da $T_3(f,0)(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3$ bekommen wir nach dem Taylor Satz, dass

$$|\cos x - (1 - \frac{1}{2}x^2)| = |\frac{1}{4!}(\cos\xi)x^4| \leqslant \frac{1}{4!}x^4.$$

b) Wir bringen die erweiterte Matrix $(A|y)$ durch Zeilenumformungen auf Zeilennormalform:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 6 & 9 & 9 \\ 8 & -6 & 2 & 4 & 20 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_2 \to \frac{1}{8}Z_2]{Z_3 \to Z_3 + \frac{1}{3}Z_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 6 & 9 & 9 \\ 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_1 \leftrightarrow Z_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_1 \to Z_1 + \frac{3}{4}Z_2]{Z_2 \to \frac{1}{3}Z_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{11}{4} & \frac{19}{4} \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Mittels des -1 Ergänzungstricks bekommen wir,dass

$$Kern(A) = \text{lin}\left\{ \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{11}{4} \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

und die Lösung ist

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} \frac{19}{4} \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \frac{11}{4} \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.