Modulprüfung / Bachelor
Höhere Mathematik I für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik

Aufgabe 1 ((8 + 2) + 4 + 6 Punkte)

- a) (i) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^n \frac{4k}{3^k} = 3 - \frac{2n+3}{3^n}.$$

- (ii) Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k}$ mit Hilfe des Teils (i) auf Konvergenz. Bestimmen Sie gegebenenfalls den Wert der Reihe.

- b) Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := x^4.$$

Bestimmen Sie das Urbild vom Intervall $[1, 16]$ unter f . Ist f injektiv? Begründen Sie Ihre Antworten.

- c) (i) Bestimmen Sie ein $r > 0$ und ein $\theta \in \mathbb{R}$ so dass $1 - \sqrt{3}i = re^{i\theta}$.
(ii) Bestimmen Sie mit Hilfe des Teils (i) den Real- und Imaginärteil aller Lösungen der Gleichung $z^2 = 1 - \sqrt{3}i$.

Aufgabe 2 (10 + 10 Punkte)

- a) i) Sei $x > 0$. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Taylor, dass es ein $c \in [0, x]$ gibt mit $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{\cos(c)}{4!}x^4$.
ii) Zeigen Sie mit Hilfe des Teils (i), dass $0,995 < \cos\left(\frac{1}{10}\right) < 0,995 + 10^{-5}$.
b) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, so dass die folgende komplexe Potenzreihe konvergent ist:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-2 + (-1)^n)^n (z + 2i)^n.$$

Aufgabe 3 (6 + (4 + 4) + 6 Punkte)

- a) Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum der Funktion $f : [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = e^x(x^2 + 2x + 1).$$

- b) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

i) $\int_0^1 \frac{2e^{2x}}{e^{4x} + 1} dx.$

ii) $\int_1^e 4x^3 \ln(x) dx.$

- c) Zeigen Sie, dass das folgende uneigentliche Integral konvergent ist:

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} \sin\left(\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\right) dx.$$

Hinweis: Unter anderem können Sie verwenden, dass $|\sin(y)| \leq |y| \forall y \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4 (6 + (4 + 4) + 6 Punkte)

- a) Seien $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie mit Hilfe des Gram-

Schmidt-Verfahrens eine Orthonormalbasis von $\text{lin}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ in $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt.

- b) i) Ist der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ im Bild der Matrix $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

- ii) Für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$ ist der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ c \end{pmatrix}$ im Kern der Matrix $B = \begin{pmatrix} a & 0 & -2 \\ 0 & b & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

- c) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha + 1 & \alpha + 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ **nicht** lösbar ist.

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:

Die Klausurergebnisse hängen ab dem **24.04.2019**, am Schwarzen Brett neben Zimmer 2.027 im Mathematik-Gebäude 20.30 aus.

Die Klausureinsicht findet am Donnerstag, den **02.05.2019**, von 16 bis 18 Uhr im Messtechnik Hörsaal (Geb. 30.33) statt.

Die mündlichen Nachprüfungen sind in der Woche vom **13.05.2019** bis **17.05.2019**.