Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
apl.Prof. Dr. P. Kunstmann

Frühjahr 2020
20.02.2020

Modulprüfung / Bachelor
Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Aufgabe 1 **(6 + 6 + 8 Punkte)**

a) Berechnen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, die der Gleichung

$$z^4 + i = 0$$

genügen.

b) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \geqslant 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k(2k+1) = \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$$

c) Bestimmen Sie die Grenzwerte:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^4 + n^{\frac{3}{2}} \cos n} - n^2\right)$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \tan x}{e^{x^2} - e^{-x^2}}$

Aufgabe 2 **(12+8 Punkte)**

a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x) := e^{2x} - \arctan(x) + x$.

i) Zeigen Sie, dass f eine Umkehrfunktion $f^{-1}\colon f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ besitzt, indem Sie begründen, dass f injektiv ist, und das Bild $f(\mathbb{R})$ von f angeben.

ii) Bestimmen Sie $f^{-1}(1)$ und berechnen Sie $(f^{-1})'(1)$.

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass für alle $x, y \in [0, \pi/2]$ gilt

$$\left|\ln(1+\sin x) - \ln(1+\sin y)\right| \leqslant |x-y|\,.$$

Aufgabe 3 **(8+6+6 Punkte)**

a) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

i) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x \sin(x^2)\, dx$

ii) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \sin^2(x)\, dx$

– bitte wenden –

b) Berechnen Sie Minimum und Maximum der Funktion

$$f : \begin{cases} [1,4] & \to & \mathbb{R}\,, \\ x & \mapsto & |2x - \frac{1}{x}|\,. \end{cases}$$

c) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2(\frac{\pi}{2}x)}{x^2+1}\,dx$$

konvergent ist und dass sein Wert in $\left[0, \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right]$ liegt.

Aufgabe 4 (14 + 6 Punkte)

a) Betrachten Sie die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 5}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie Kern(A), Bild(A), dim Bild(A) und alle Lösungen des Systems $A\vec{x} = \vec{b}$ für $\vec{b} = (8, -6, -4)^T$.

b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei

$$b_n := \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!}\right)^{(-1)^n 2n}.$$

Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{b_n}{n} (x-1)^n\,.$$

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:

Die **Ergebnisse** der Modulprüfung werden am Montag, den **23.03.2020**, neben dem Zimmer 2.027 (Geb. 20.30) veröffentlicht.
Die **Einsichtnahme** in die korrigierten Modulprüfungen findet am Dienstag, den **24.03.2020**, von **17 bis 18 Uhr** im **Fritz-Haller Hrsaal (Geb. 20.40)** statt.