Klausur Dienstag

Wednesday, 14 April 2021 22:27

hm1-etit-klausurchi

Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. Ioannis Anapolitanos

Frühjahr 2021
06.04.2021

Modulprüfung / Bachelor

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Aufgabe 1 (4 + 6 + 6 + 4 Punkte)

a) Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{e^{\frac{4x}{\pi}} - e}{\sin(x) - \cos(x)}.$$

b) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, die der Gleichung $z^5 = \frac{1-i}{1+i}$ genügen.

c) Untersuchen Sie mit dem Quotientenkriterium die folgende Reihe auf Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((2n)!)(n!)}{(3n)!}.$$

d) Wir betrachten eine komplexe Potenzreihe der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ (Koeffizienten a_n, Entwicklungspunkt z_0), mit Konvergenzradius $R \in (0, \infty)$. Ein Student hat behauptet, dass es immer unmöglich ist, die Konvergenz der Potenzreihe für $|z - z_0| = R$ mit dem Wurzelkriterium zu untersuchen. Hat der Student Recht? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2 (4 + 4 + 4 + 4 + 4 Punkte)
Wir betrachten die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x)$.

a) Unter Verwendung der Gleichung $(e^x)' = e^x$ und der Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion zeigen Sie, dass $f'(x) = \frac{1}{x}$.

b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n}$.

c) Sei $x > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie mit Hilfe des Teils **b)** und unter Verwendung des Taylorsatzes, dass es ein c zwischen 1 und x gibt mit

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}(x-1)^k}{k} + (-1)^{n+2} \frac{1}{(n+1)c^{n+1}} (x-1)^{n+1}.$$

d) Mit Hilfe des Teils **c)** zeigen Sie, dass

$$\left| \ln(0.8) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(0.2)^k}{k} \right| \leqslant \frac{1}{(n+1)4^{n+1}}.$$

e) Mit Hilfe des Teils **d)** bestimmen Sie explizit eine Approximation von $\ln(0.8)$ mit Fehler kleiner als 0,01. Begründen Sie Ihre Antwort.

– **bitte wenden** –

Aufgabe 3 (8 + 6 + 6 Punkte)

a) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

i) $\displaystyle\int_0^\pi x\sin(x)\,\mathrm{d}x$,

ii) $\displaystyle\int_2^3 x^2 e^{x^3}\,\mathrm{d}x$, mittels geeigneter Substitution.

b) Zeigen Sie, dass das folgende uneigentliche Integral absolut konvergent ist:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x^2+x^{1.5}}\,\mathrm{d}x.$$

Hinweis: Sie können unter anderem verwenden, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $|\sin(x)| \leqslant |x|$.

c) Wir betrachten die Menge $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \geqslant |x|\}$. Skizzieren Sie die Menge A und untersuchen Sie mittels der Definition eines Unterraums, ob A ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$ ist.

Hinweis: Um die Skizze zu erstellen, könnten Sie z.B. versuchen, erst die Menge $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| = |x|\}$ zu skizzieren.

Aufgabe 4 (8 + 8 + 4 Punkte)

a) In $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt betrachten wir die Ebene $E = \operatorname{lin}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$, wobei $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

i) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens eine Orthonormalbasis von E.

ii) Sei G die Gerade, die durch den Ursprung geht und orthogonal zu der Ebene E ist (d.h. G ist orthogonal zu jedem Vektor der Ebene). Sei $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Orthogonalprojektion von $\vec{w}$ auf G. Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Wir betrachten die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & \beta & 2 \\ 4 & 2 & \alpha \end{pmatrix}$ und den Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \beta \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Menge aller $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, für die das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ nicht lösbar ist.

c) Sei $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Lösung des Systems $C\vec{x} = \vec{b}$ unter Verwendung der Cramerschen Regel.

Viel Erfolg!