(1a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\overbrace{e^{\frac{4x}{\pi}}}^{\to e}-e}{\underbrace{\sin(x)}_{\to\frac{1}{\sqrt{2}}}-\underbrace{\cos(x)}_{\frac{1}{\sqrt{}}}} = "\frac{0}{0}"$ $\xrightarrow{\text{l'Hospital}}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\left(e^{\frac{4x}{\pi}}-e\right)'}{\left(\sin(x)-\cos(x)\right)'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{4}{\pi}e^{\frac{4}{\pi}x}}{\cos(x)+\sin(x)}$$

$$= \frac{\frac{4}{\pi}e}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4e}{\pi\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\frac{4\pi}{x}}-e}{\sin(x)-\cos(x)} = \frac{4e}{\pi\sqrt{2}}.$$

(1b) $z^5 = \dfrac{1-i}{1+i} = \dfrac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{1^2+i^2-2i}{1^2-i^2} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}.$

$$\Longrightarrow z_k = e^{-i\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{5}}, \quad k=0,1,2,3,4.$$

(1c) $a_n = \dfrac{(2n)!\,n!}{(3n)!}$ $\quad \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{\frac{(2n+2)!\,(n+1)!}{(3n+3)!}}{\frac{(2n)!\,n!}{(3n)!}}$

$$= \frac{(2n+2)!}{(2n)!}\,\frac{(n+1)!}{n!}\,\frac{(3n)!}{(3n+3)!}$$

$$= \frac{(2n+1)(2n+2)(n+1)}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = \underbrace{\frac{2n+1}{3n+1}}_{\to\frac{2}{3}}\,\underbrace{\frac{2n+2}{3n+2}}_{\to\frac{2}{3}}\,\underbrace{\frac{n+1}{3n+3}}_{\to\frac{1}{3}} \to \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{27} < 1.$$

deshalb konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium deshalb konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium.

(1d).
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$$\sqrt[n]{|a_n||(z-z_0)^n|} = |z-z_0| \sqrt[n]{|a_n|} = R \sqrt[n]{|a_n|}.$$

$$\Rightarrow \limsup \sqrt[n]{|a_n||z-z_0|^n} = R \underbrace{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}_{=\frac{1}{R}} = 1.$$

Deshalb liefert an den Randpunkten das Wurzelkriterium keine Entscheidung, und der Student hat Recht.

2(a) $f(x) = \ln x$. Sei $g(x) = e^x$ dann $f(x) = g^{-1}(x)$. Also $f'(x) = (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))}$

und da $g'(x) = e^x$ gilt

$$f'(x) = \frac{1}{e^{g^{-1}(x)}} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

(b) Für $n=1$ $f^{(1)}(x) = f'(x) = \frac{1}{x} = (-1)^{1+1} \frac{(1-1)!}{x^1}$

da $0! = 1$ und $(-1)^2 = 1$ $\rightarrow$ Aussage stimmt.

Annahme $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n}$.

z.z. $f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+2} \frac{n!}{x^{n+1}}$.

$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' = ((-1)^{n+1} \quad (n-1)! \quad)' \quad)$

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = \left((-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n}\right)'$$

und da $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \left(x^{-n}\right)' = -n\, x^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}$ $\Big\} \Rightarrow$

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!\,(-n)}{x^{n+1}} = (-1)^{n+2} \frac{n!}{x^{n+1}}$$

q.e.d.

(c) Da $f \in C^\infty$ nach Taylor $\exists$ c zwischen $1, x$

mit $f(x) = \underbrace{f(1)}_{=\ln(1)=0.} + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-1)^{n+1}$

Aus (b) $f^{(k)}(1) = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{1^k}$,

und $f^{(n+1)}(c) = (-1)^{n+2} \frac{n!}{c^{n+1}}$ $\Rightarrow$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{k!}(x-1)^k + (-1)^{n+2} \frac{n!}{(n+1)!\,c^{n+1}}(x-1)^{n+1}$$

$$\xrightarrow{\frac{(k-1)!}{k!} = \frac{1}{k}} f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}(x-1)^k}{k} + (-1)^{n+2} \frac{1}{(n+1)\,c^{n+1}}(x-1)^{n+1}.$$

(d) Der Teil c für $x = 0{,}8$ gibt

$$\ln(0.8) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}(-0{,}2)^k}{k} + (-1)^{n+2} \frac{1}{(n+1)c^{n+1}}(-0{,}2)^{n+1}$$

da $(-1)^{k+1}(-0{,}2)^k = (-1)^{k+1}(-1)^k\, 0{,}2^k = -0{,}2^k$.

bekommen wir

$\ln(0.8) \quad \sum^{n} \quad 0.2^k \quad 1 \quad (0.2)^{n+1}$

$$\ln(0.8) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{0.2^k}{k} - \frac{1}{n+1}\left(\frac{0.2}{c}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow \left|\ln(0.8) + \sum_{k=1}^{n} \frac{0.2^k}{k}\right| = \frac{1}{n+1}\left(\frac{0.2}{c}\right)^{n+1} \leq \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

da $c \geq 0.8$.

(e) $n=1 \rightsquigarrow \frac{1}{1+1}\left(\frac{1}{4}\right)^{1+1} = \frac{1}{2}\frac{1}{16} = \frac{1}{32} > \frac{1}{100}$.

$n=2 \rightsquigarrow \frac{1}{2+1}\left(\frac{1}{4}\right)^{2+1} = \frac{1}{3}\frac{1}{64} < \frac{1}{100}$.

Also für $n=2$ bekommen wir

$$\left|\ln(0.8) + \sum_{k=1}^{2} \frac{0.2^k}{k}\right| < \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \left|\ln(0.8) + \frac{0.2}{1} + \frac{0.2^2}{2}\right| < \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \left|\ln(0.8) + 0.22\right| < \frac{1}{100}.$$

Also ist -0.22 eine solche Approximation.

(3a)(i) $\int_0^\pi x\sin(x)\,dx = \int_0^\pi x\left(-\cos(x)\right)'\,dx$

$$= x(-\cos(x))\Big|_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi (x)'(-\cos(x))\,dx.$$

$$= -x\cos(x)\Big|_{x=0}^{x=\pi} + \int_0^\pi \cos(x)\,dx$$

$$= -\pi\cos(\pi) + 0\cos(0) + \underbrace{\sin(x)\Big|_{x=0}^{x=\pi}}_{=0}.$$

$$= \pi$$

(ii) $\int_2^3 x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3}\int_2^3 \underbrace{e^{x^3}}_{=e^u} \underbrace{3x^2 dx}_{= du}$

$u = x^3$, $du = 3x^2 dx$,

$x=2 \to u = 8$, $x = 3 \to u = 27$

Also $\int_2^3 x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3}\int_8^{27} e^u du$

$= \frac{1}{3} e^u \Big|_8^{27} = \frac{1}{3}(e^{27} - e^8)$.

(b). Es gilt

$$\int_0^\infty \frac{|\sin(x)|}{x^2+x^{1.5}} dx = \int_0^1 \frac{|\sin(x)|}{x^2+x^{1.5}} dx + \int_1^\infty \frac{|\sin(x)|}{x^2+x^{1.5}} dx.$$

Auf $(0,1]$ gilt $\frac{|\sin(x)|}{x^2+x^{1.5}} \leq \frac{x}{x^2+x^{1.5}} = \frac{1}{x+\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$

und $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ ist konvergent

$\xrightarrow[\text{Kriterium}]{\text{Majoranten}}$ $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^2+x^{1.5}} dx$ ist absolut konvergent.

Auf $[1,\infty)$ gilt $\frac{|\sin(x)|}{x^2+x^{1.5}} \leq \frac{1}{x^2+x^{1.5}} \leq \frac{1}{x^2}$

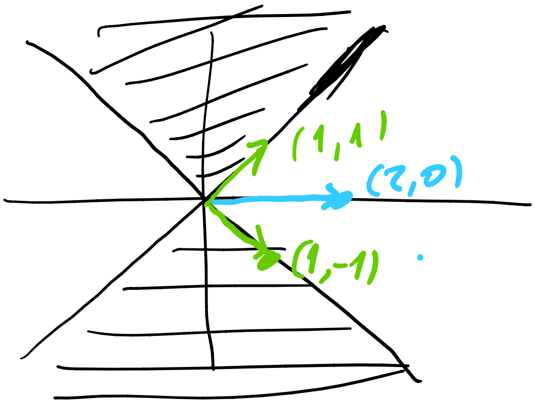
und $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ ist konvergent.

$\xrightarrow[\text{Kriterium}]{\text{Majoranten}}$ $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x^2+x^{1.5}} dx$ ist absolut konvergent.

Also konvergiert $\int^\infty \frac{\sin(x)}{\ldots} dx$

Also konvergiert $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x^2+x^{1.5}}\,dx$ absolut.

(c) $|x|=|y| \iff y=x$ oder $y=-x$



Also besteht die Skizze von C aus den Winkelhalbierenden.

Ferner $|y| \geq |x| \iff y \geq |x|$ oder $y \leq -|x|$

Die Skizze sehen wir deshalb oben.

Da $(1,1) \in A$ (weil $|1|=|1|$)

und $(1,-1) \in A$ (weil $|1|=|-1|$).

aber $(1,1)+(1,-1) = (2,0) \notin A$

(weil $|0|<|2|$). ist A kein Untervaum von $\mathbb{R}^2$.

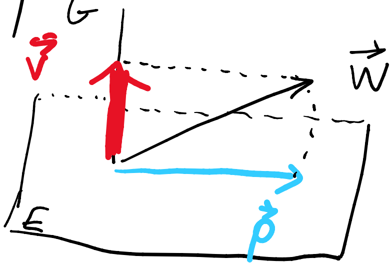
(4a) (i) $\vec{b}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{\vec{v}_1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

$\vec{c}_2 = \vec{v}_2 - (\vec{v}_2 \cdot \vec{b}_1)\,\vec{b}_1 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

$= \begin{pmatrix}2\\1\\ \end{pmatrix} - \frac{2+1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\ \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} - \underbrace{\frac{2+1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}}_{=1} \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

$$\vec{b}_2 = \frac{\vec{c}_2}{|\vec{c}_2|} = \frac{\vec{c}_2}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

(ii) 

Sei $\vec{v}$ die Orthogonalprojektion auf G. und $\vec{p}$ die Orthogonalprojektion auf E. dann $\vec{v} = \vec{w} - \vec{p}$ (da $\vec{w} - \vec{p}$ orthogonal zu E und deshalb parallel zu G ist).

Deshalb $\vec{v} = \vec{w} - \vec{p} \xRightarrow[\text{von } E]{\vec{b}_1, \vec{b}_2 \text{ ONB}}$

$$\vec{v} = \vec{w} - (\vec{w}\cdot\vec{b}_1)\vec{b}_1 - (\vec{w}\cdot\vec{b}_2)\vec{b}_2$$

$$= \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} - \frac{2+1}{\sqrt{3}\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0{,}5\\1\\-0{,}5\end{pmatrix}.$$

Zweiter Lösungsweg: Ein Vektor

Zweiter Lösungsweg: Ein Vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ist parallel zu $G \Leftrightarrow$ ist orthogonal zu beiden $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \text{ und } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \right] \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ 2a+b=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=-2a \\ a-2a+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2a \\ c=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also $\vec{k} = \dfrac{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \dfrac{1}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

ist ein Vektor mit $\|\vec{k}\| = 1$ und mit $G = \text{Lin}\{\vec{k}\}$. Deshalb gilt

$$\vec{v} = (\vec{w} \cdot \vec{k})\vec{k} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-2 \cdot 2 + 1 \cdot 1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

(b) $$(A \mid \vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & \beta & 2 & 2 \\ 4 & 2 & \alpha & \beta \end{array} \right) \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - 2Z_1]{Z_2 \to Z_2 - Z_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \beta-1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-2 & \beta-2 \end{array} \right).$$

Wenn $\alpha = 2$ und $\beta \neq 2$, dann

Wenn $\alpha = 2$ und $\beta \neq 2$. dann gibt es keine Lösung.

Wenn $\alpha = 2$ und $\beta = 2$ wird das System
$$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \text{lösbar.}$$

Wenn $\alpha \neq 2$, $\beta \neq 1$ ist das System lösbar. da wir oben in diesem Fall ZSF von A erreicht haben ohne Nullzeilen. Wenn $\beta = 1$ bekommen wir
$$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - (\alpha-2) Z_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\alpha \end{array}\right)$$
und das ist lösbar $\iff \alpha = 1$

Also ist das System nicht lösbar

$\iff [(\alpha = 2)$ und $\beta \neq 2]$ oder $[(\beta = 1)$ und $(\alpha \neq 1)]$.

(c) $$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{3 \cdot 6 - 2 \cdot 4}{1 \cdot 6 - 2 \cdot 5} = \frac{10}{-4} = -2.5.$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{1 \cdot 4 - 5 \cdot 3}{1 \cdot 6 - 2 \cdot 5} = \frac{-11}{-4} = 2.75.$$