

(1a) für $n=1$ $A^1 = A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^1 & 0 \\ 2^1 - 3^1 & 3^1 \end{pmatrix}$.

→ Aussage stimmt.

Annahme $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 2^n - 3^n & 3^n \end{pmatrix}$

z.z. $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 2^{n+1} - 3^{n+1} & 3^{n+1} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 2^n - 3^n & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2^n \cdot 2 + 0 \cdot (-1) & 2^n \cdot 0 + 0 \cdot 3 \\ (2^n - 3^n) \cdot 2 - 3^n & (2^n - 3^n) \cdot 0 + 3^n \cdot 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 2^{n+1} - 3^{n+1} & 3^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 2^{n+1} - 3^{n+1} & 3^{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

q.e.d.

(1b) $1 + \sqrt{3}i = r e^{i\theta}$ mit

$$r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2.$$

$$\theta = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

↳ da $\sqrt{3} > 0$.

$$\text{Also } (1 + i\sqrt{3})^{61} = (2 e^{i\frac{\pi}{3}})^{61} = 2^{61} e^{i\frac{61\pi}{3}}.$$

$$= 2^{61} e^{i\frac{60\pi}{3}} e^{i\frac{\pi}{3}} = 2^{61} \underbrace{e^{i20\pi}}_{=1} e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

$$= 2^{61} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2^{61} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right).$$

$$\text{Also } \operatorname{Re} (1 + i\sqrt{3})^{61} = 2^{60} \sqrt{3}, \operatorname{Im} (1 + i\sqrt{3})^{61} = 2^{60}.$$

(1c) ...

(1c). (i) $g'(x) = (e^x(x-1))' + (\ln x)' = (e^x)'(x-1) + e^x(x-1)' + \frac{1}{x}$
 $= e^x(x-1) + e^x + \frac{1}{x} = xe^x + \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x \in [\frac{1}{2}, 2]$
 deshalb ist g streng monoton wachsend,
 und deshalb injektiv.

$$g(\frac{1}{2}) = e^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}-1) + \ln(\frac{1}{2}) = -\frac{\sqrt{e}}{2} - \ln(2)$$

$$g(2) = e^2(2-1) + \ln(2) = e^2 + \ln(2)$$

$$\text{sei } a \in (-\frac{\sqrt{e}}{2} - \ln(2), e^2 + \ln(2)).$$

$$\text{dann } a > g(\frac{1}{2})$$

$$a < g(2).$$

und g ist stetig.

Zwischenwertsatz

$$\exists x_0 \in (\frac{1}{2}, 2)$$

$$\text{so dass } g(x_0) = a.$$

$$\left[-\frac{\sqrt{e}}{2} - \ln(2), e^2 + \ln(2)\right] \subset \text{Bild } g$$

Also g surjektiv.

$$\text{Bem: Das Bild } g \subset \left[-\frac{\sqrt{e}}{2} - \ln(2), e^2 + \ln(2)\right]$$

sieht man mit (1), (2) da g streng monoton wachsend ist.

$$(1c) \text{ (ii) } g(1) = e^1(1-1) - \ln 1 = 0 \Rightarrow h(0) = 1.$$

$$h'(0) = \frac{1}{g'(h(0))} = \frac{1}{g'(1)} = \frac{1}{1e^1 + \frac{1}{1}} = \frac{1}{e+1}.$$

$$(2a) (i) \quad T_1(f, \frac{\pi}{6})/x = f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\text{Aber } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sin(x)} (\sin(x))' = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

$$\text{Also } f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$T_1\left(f, \frac{\pi}{6}\right)(x) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

(ii) Nach Taylor $\exists$ c zwischen $\frac{\pi}{6}$ und x mit.

$$f(x) - T_1\left(f, \frac{\pi}{6}\right)(x) = \frac{f''(c)}{2!} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 \quad (3)$$

$$\text{Aber } f'(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{(\cos(x))' \sin(x) - \cos(x)(\sin(x))'}{(\sin(x))^2}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} \xrightarrow{\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1}$$

$$\Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)} \quad \text{Also } f''(c) = -\frac{1}{\sin^2(c)} \quad (4)$$

$$\Rightarrow 4|x| = -\frac{1}{\sin^2(x)} \quad \text{Also } 4|c| = -\frac{1}{\sin^2(c)} \quad \text{41}$$

$$(3), (4) \Rightarrow f(x) = T_1\left(f, \frac{\pi}{6}\right)(x) = -\frac{(x - \frac{\pi}{6})^2}{2\sin^2(c)} \text{ g.e.d.}$$

(iii). Aus Teil (ii) mit $x = \frac{\pi}{6} + 0,1$ bekommen wir

$$f\left(\frac{\pi}{6} + 0,1\right) = T_1\left(f, \frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{\pi}{6} + 0,1\right) = -\frac{0,1^2}{2\sin^2(c)},$$

wobei c zwischen $\frac{\pi}{6}$ und $\frac{\pi}{6} + 0,1$.

Es reicht also zu zeigen, dass

$$-0,02 \leq -\frac{0,1^2}{2\sin^2(c)} \leq 0$$

die rechte Ungleichung ist klar, da das Quadrat einer Zahl immer positiv ist. Es reicht also zu zeigen, dass

$$-\frac{0,1^2}{2\sin^2(c)} \geq -0,02$$

Da c zwischen $\frac{\pi}{6}$ und $\frac{\pi}{6} + 0,1$ ist gilt

$$\sin(c) \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2(c) \geq \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sin^2(c)} \leq 4 \Rightarrow \frac{1}{2\sin^2(c)} \leq 2 \Rightarrow \frac{0,1^2}{2\sin^2(c)} \leq 0,02$$

$$\Rightarrow -\frac{0,1^2}{2\sin^2(c)} \geq -0,02 \text{ g.e.d.}$$

$$(b) \quad (i) \quad R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n^3 2^{n/2}}}} = \frac{1}{\lim \underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{n^3}}}_{\rightarrow 1} \sqrt[n]{2}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}.$$

(ii) Wenn $|z+i-1| = \sqrt{2}$, gilt

$$\left| \frac{1}{n^3 2^{\frac{n}{2}}} (z+i-1)^n \right| = \frac{1}{n^3 2^{\frac{n}{2}}} |z+i-1|^n = \frac{1}{n^3} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n (\sqrt{2})^n = \frac{1}{n^3}.$$

und da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ konvergent ist, konvergiert

die Potenzreihe nach dem

Majorantenkriterium.

(iii) Aus (i), (ii) bekommen wir

$$K = \{ z \in \mathbb{C} : |z+i-1| \leq \sqrt{2} \}$$

$$= \{ z \in \mathbb{C} : |z - (1-i)| \leq \sqrt{2} \}.$$

Kreisscheibe mit Zentrum $1-i$ und Radius $\sqrt{2}$.

Schnittpunkte: $D = \{ z \in \mathbb{C} : |z - (1-i)| = \sqrt{2} \}.$

$$z \in \mathbb{R} \quad \text{dann} \quad |z - (1-i)| = \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$|(z-1) + i|^2 = (\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow (z-1)^2 + 1^2 = 2 \Leftrightarrow$$

$$(z-1)^2 = 1 \Leftrightarrow z=2 \text{ oder } z=0.$$

$$z = ia, \quad a \in \mathbb{R} \quad \text{dann} \quad |z - (1-i)| = \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

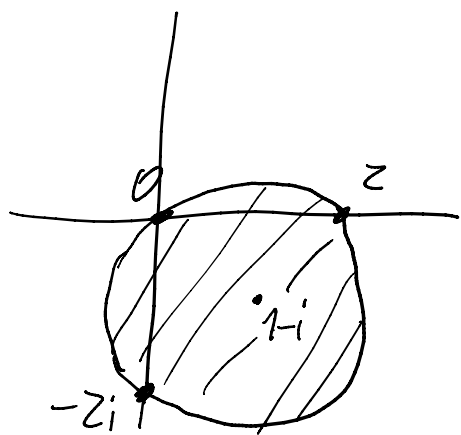
$$|-1 + i(a+1)| = \sqrt{2} \Leftrightarrow (-1)^2 + (a+1)^2 = (\sqrt{2})^2$$

$$\Leftrightarrow 1 + (a+1)^2 = 2 \Leftrightarrow (a+1)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow a=0 \text{ oder } a=-2.$$

$$\Leftrightarrow a=0 \text{ oder } a=-2.$$

$$(\text{Also } z=0 \text{ oder } z=-2i).$$



Mit allen diesen Informationen bekommen wir eine Skizze der Menge K .

(3a) (i) Sei $u=\sqrt{x}$ dann $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$.

Ferner $x=1 \Rightarrow u=1$, $x=2, u=\sqrt{2}$ Also.

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} dx = 2 \int_1^{\sqrt{2}} \underbrace{\frac{1}{1+\sqrt{x}}}_{=1+u} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} dx \right)^{du}$$

$$= 2 \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{1+u} du = 2 \ln(1+u) \Big|_{u=1}^{u=\sqrt{2}} =$$

$$= 2 (\ln(1+\sqrt{2}) - \ln(2)).$$

(ii) $\int_{-1}^1 (|x|+x) e^x dx = \int_{-1}^0 (|x|+x) e^x dx + \int_0^1 (|x|+x) e^x dx.$

Aber $|x|+x=0$ für $x \leq 0$ und $|x|+x=2x$ für $x \geq 0$.

Deshalb $\int_{-1}^1 (|x|+x) e^x dx = \int_0^1 2x e^x dx$

$$= \int_0^1 2x (e^x)' dx = 2x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 (2x)' e^x dx$$

$$= \int_0^1 x(e^{1/x} - e^{1/0}) = \int_0^1 x(e^{1/x} - \infty) dx$$

$$= 2e - \int_0^1 2e^x dx = 2e - [2e^x]_{x=0}^{x=1} = 2e - 2e + 2 = 2.$$

(6) Es gilt $e^{-\frac{2}{3} \ln(x-1)} = (e^{\ln(x-1)})^{-\frac{2}{3}} = (x-1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}.$

Also lautet das Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{(1+e^x)(x-1)^{\frac{2}{3}}} dx = \int_1^2 \frac{1}{(1+e^x)(x-1)^{\frac{2}{3}}} + \int_2^{\infty} \frac{1}{(1+e^x)(x-1)^{\frac{2}{3}}} dx.$$

Wobei die Zerlegung in zwei Integralen nötig ist weil die integrierende Funktion für $x=1$ nicht definiert wird.

In $[2, \infty)$ haben wir $(x-1)^{\frac{2}{3}} \geq 1$ deshalb.

$$\frac{1}{(1+e^x)(x-1)^{\frac{2}{3}}} \leq \frac{1}{1+e^x} \leq \frac{1}{e^x} = e^{-x}.$$

und da $\int_2^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_2^r e^{-x} dx =$

$$= \lim_{r \rightarrow \infty} (e^{-x})_{x=2}^{x=r} = \lim_{r \rightarrow \infty} (e^{-2} - e^{-r}) = e^{-2} \in \mathbb{R}.$$

konvergiert das Integral $\int_2^{\infty} e^{-x} dx$ und deshalb nach Majorantenkriterium konvergiert das Integral

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{(1+e^x)(x-1)^{\frac{2}{3}}} dx.$$

Für $x \in (1, 2]$ gilt $\frac{1}{(1+e^x)(x-1)^{\frac{2}{3}}} \leq \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}.$

Für $x \in (1, 2]$ gilt $\frac{1}{(1+e^x)(x-1)^{\frac{2}{3}}} \leq \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$.

und $\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} dx = \lim_{r \rightarrow 1^+} \int_r^2 \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} dx$

$u = x-1$ $\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_r^1 \frac{1}{u^{\frac{2}{3}}} du = \int_0^1 \frac{1}{u^{\frac{2}{3}}} du$.
konvergent da $\frac{2}{3} < 1$.

Deshalb ist nach Majorantenkriterium

$\int_1^2 \frac{1}{(1+e^x)(x-1)^{\frac{2}{3}}} dx$ ebenso konvergent.

Deshalb konvergiert das uneigentliche Integral.

(c) Sei $a_n = \sqrt{2} + (1+(-1)^n)/n$.

Dann $a_{2n+1} = \sqrt{2} \rightarrow \sqrt{2}$

$a_{2n} = \sqrt{2} + 2/n \rightarrow \infty$.

Da diese zwei Teilfolgen alle Terme der Folge beinhalten ist der einzige Häufungswert $\sqrt{2}$ (die Häufungswerte sind immer reelle Zahlen) und a_n konvergiert nicht.

$$(4a)(i) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{z_2 \rightarrow z_2 - 2z_1 \\ z_3 \rightarrow z_3 - z_1}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{z_2 \leftrightarrow z_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{z_1 \rightarrow z_1 - z_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{z_1 \rightarrow z_1 - 2z_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right). \quad \text{Also}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) Ja der Student hat Recht.

Um die Matrix zu invertieren

haben wir die System $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gleichzeitig

gelöst. Insbesondere, wenn man in den Schritten des Teils (i)

die 4e und 5e Spalte ignoriert bekommt man.

bekommt man.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{Formungen}]{\text{gleiche Zeilennum-}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Deshalb haben wir im vorherigen Schritt bezüglich der unbekannten Variablen aufgelöst und die Lösung ist $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Insoweit gibt es gar keine Berechnungen zu tun.

(b) C nicht invertierbar $\Rightarrow$

$$\det C = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y \\ -y & x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0$$

$\xRightarrow{x, y \in \mathbb{R}} x = y = 0$ (weil $x^2 \geq 0, y^2 \geq 0$ also $x^2 + y^2$ kann 0 sein nur wenn beide x, y 0 sind).

(c) Da Bild $B = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \right\}$ gilt

Bild $B = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ genau dann wenn

beide Vektoren $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ parallel

zu $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist oder $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 2b \end{pmatrix}$

Also Bild $B = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \Leftrightarrow$

$$B = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}$$

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ 2a & 2b \end{pmatrix}, \quad |a| + |b| \neq 0.$$

In diesem Fall ist $\dim \ker B = 1$ wegen der Dimensionsformel also

$$\ker B = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 2a & 2b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ 2a+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow a+b=0. \Leftrightarrow b=-a, \quad a \neq 0.$$

Also B erfüllt die 2 Bedingungen

$$\Leftrightarrow B = a \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad a \neq 0.$$

Also ist $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ eine mögliche Wahl.