Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. Ioannis Anapolitanos

Frühjahr 2022
28.02.2022

Modulprüfung / Bachelor
Höhere Mathematik I für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik

Aufgabe 1 **(4 + (3 + 1 + 4 + 6) = 18 Punkte)**

a) Bestimmen Sie den Real- und Imagenärteil der Zahl $(-1+\sqrt{3}i)^9$.

b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $f(x) = \cos(x)$.

i) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos(x)$.

ii) Zeigen Sie mit Hilfe des Teils **i)**, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \sin(x)$.

iii) Sei $x \in \mathbb{R}$ und $N \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie unter Verwendung des Satzes von Taylor und mit Hilfe der Teile **i)**, **ii)**, dass es ein c_N zwischen 0 und x gibt so, dass

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \frac{(-1)^{N+1} x^{2N+2} \cos(c_N)}{(2N+2)!}.$$

iv) Zeigen Sie mit Hilfe des Teils **iii)**, dass

$$\left| \cos(\sqrt{2}) - \sum_{n=0}^{9} \frac{(-1)^n 2^n}{(2n)!} \right| < 10^{-10}.$$

Aufgabe 2 **(8 + 6 + 4 + 4 = 22 Punkte)**

a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ für die die folgende reelle Potenzreihe konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{2^n \sqrt[3]{n^2}}.$$

b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $x^{\log_{10} x} = 1000x^2$.

c) Sei $f : [0,1] \to (0,1)$ stetig. Zeigen Sie, dass es ein $x_0 \in (0,1)$ gibt mit $f(x_0) = x_0$.
<u>**Hinweis:**</u> Betrachten Sie die Funktion $g(x) = f(x) - x$.

d) Ein Student hat in einer Klausur behauptet, dass die Gleichheiten

$$\sin(\arcsin(x)) = x \quad \forall x \in D, \qquad \arcsin(\sin(y)) = y \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

gelten, wobei D der Definitionsbereich von arcsin ist. Hat der Student Recht? Begründen Sie Ihre Antwort für jede dieser zwei Gleichheiten.

– **bitte wenden** –

Aufgabe 3 **(8 + 6 + 4 = 18 Punkte)**

a) **i)** Wir betrachten das uneigentliche Integral $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$. Zeigen Sie mit der Definition der Konvergenz und mittels geeigneter Substitution, dass das uneigentliche Integral konvergent ist und, dass $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = 1$.

ii) Bestimmen Sie mit Hilfe (unter anderem) des Teils **i)**, den Wert des Integrals $\int_0^1 \arccos(x)dx$.

b) Sei $g : [-3, 2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = (|x|-1)e^x$. Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum von g.

c) Wir betrachten den Vektorraum $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$. V ist der Vektorraum der Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Ist

$$U = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(0) = 0 \text{ oder } f(1) = 0\}$$

ein Unterraum von V? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 **(12 + 6 + 4 = 22 Punkte)**

a) Wir betrachten die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$.

i) Bestimmen Sie eine Zeilennormalform von A.

ii) Bestimmen Sie eine Basis der Lösungsmenge der Gleichung $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

iii) Sind die Zeilen von A linear unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Gibt es eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ (3×2 Matrix) so, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ alle im Bild von B sind? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Sei $\vec{v_1}, \vec{v_2}$, eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ und $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, mit Hilfe des Skalarprodukts, die aus der Vorlesung bekannte Formel

$$\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{v_1})\vec{v_1} + (\vec{v} \cdot \vec{v_2})\vec{v_2}.$$

<u>**Hinweis**</u>: Schreiben Sie $\vec{v} = a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2}$ und bestimmen Sie die Koeffizienten a_1, a_2.

Viel Erfolg!

(1a) $|-1+\sqrt{3}i| = (-1)^2 + (\sqrt{3})^2 = 2.$

Da $\sqrt{3} > 0$ ist $\varphi = \arccos \frac{-1}{2} = \frac{2\pi}{3}$

der Polarwinkel von $-1+\sqrt{3}i$.