Aufgabe 3 **(8 + 6 + 4 = 18 Punkte)**

a) **i)** Wir betrachten das uneigentliche Integral $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$. Zeigen Sie mit der Definition der Konvergenz und mittels geeigneter Substitution, dass das uneigentliche Integral konvergent ist und, dass $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = 1$.

ii) Bestimmen Sie mit Hilfe (unter anderem) des Teils **i)**, den Wert des Integrals $\int_0^1 \arccos(x)dx$.

b) Sei $g : [-3, 2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = (|x|-1)e^x$. Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum von g.

c) Wir betrachten den Vektorraum $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$. V ist der Vektorraum der Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Ist

$$U = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(0) = 0 \text{ oder } f(1) = 0\}$$

ein Unterraum von V? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 **(12 + 6 + 4 = 22 Punkte)**

a) Wir betrachten die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$.

i) Bestimmen Sie eine Zeilennormalform von A.

ii) Bestimmen Sie eine Basis der Lösungsmenge der Gleichung $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

iii) Sind die Zeilen von A linear unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Gibt es eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ (3×2 Matrix) so, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ alle im Bild von B sind? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Sei $\vec{v_1}, \vec{v_2}$, eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ und $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, mit Hilfe des Skalarprodukts, die aus der Vorlesung bekannte Formel

$$\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{v_1})\vec{v_1} + (\vec{v} \cdot \vec{v_2})\vec{v_2}.$$

<u>**Hinweis**</u>: Schreiben Sie $\vec{v} = a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2}$ und bestimmen Sie die Koeffizienten a_1, a_2.

Viel Erfolg!

(1a) $|-1+\sqrt{3}i| = (-1)^2 + (\sqrt{3})^2 = 2$

Da $\sqrt{3} > 0$ ist $\varphi = \arccos \frac{-1}{2} = \frac{2\pi}{3}$ der Polarwinkel von $-1+\sqrt{3}i$.

der Polarwinkel von $-1+\sqrt{3}i$.

Also $-1+\sqrt{3}i = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \Rightarrow$

$$(-1+\sqrt{3}i)^9 = 2^9 e^{i\frac{2\pi}{3}\cdot 9} = 2^9 \underbrace{e^{i6\pi}}_{=1} = 2^9$$

Also $\operatorname{Re}(-1+\sqrt{3}i)^9 = 2^9$ $\quad \operatorname{Im}(-1+\sqrt{3}i)^9 = 0$

(10) Wir zeigen ein bisschen mehr nämlich

$f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (1), wobei $f^{(0)}(x) = f(x)$

Für $n=0$ $\quad f^{(0)}(x) = f(x) = \cos x = (-1)^0 \cos x$ ✓

Annahme $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x$ (*) für ein $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ z.z. $f^{(2(n+1))}(x) = (-1)^{n+1} \cos x$

$$f^{(2(n+1))}(x) = f^{(2n+2)}(x) = (f^{(2n)})''(x) \overset{(*)}{=} ((-1)^n \cos x)'' \overset{(1)}{=} (-1)^n(-\cos x)$$

$$= (-1)^{n+1} \cos x \quad \text{q.e.d}$$

(ii) $f^{(2n+1)}(x) = (f^{(2n)}(x))' \overset{(1)}{=} ((-1)^n \cos x)' = (-1)^n(-\sin x)$

$$= (-1)^{n+1} \sin x \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ (2) q.e.d}$$

(iii) Taylor $\Rightarrow \exists\, c_N$ zwischen $0, x$ mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2N+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(2N+2)}(c_N)}{(2N+2)!} x^{2N+2}$$

Aber aus (2) $\Rightarrow f^{(2n+1)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$

$$f(x) = \underbrace{\sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} x^{2n}}_{\text{nur Terme mit geraden Potenzen}} + \frac{f^{(2N+2)}(c_N)}{(2N+2)!}$$

aber aus (1). $f^{(2n)}(0) = (-1)^n$

$f^{(2N+2)}(c_N) = (-1)^{2N+2} \cos c_N$ $\Rightarrow$

$$\cos x = f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \frac{(-1)^{N+1} x^{2N+2}}{(2N+2)!} \cos c_N$$

$$\cos x = f(x) = \sum_{n=0} \frac{\ldots}{(2n)!} + \frac{\ldots x \ldots}{(2N+2)!} \cos c_N$$

$$\Rightarrow \cos x = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \frac{(-1)^{N+1} x^{2N+2}}{(2N+2)!} \cos c_N. \text{ q.e.d}$$

(iv) $\underset{x=\sqrt{2}}{(iii) \Rightarrow}$ $\cos\sqrt{2} - \sum_{n=0}^{9} \frac{(-1)^n (\sqrt{2})^{2n}}{(2n)!} = (-1)^{10} \frac{\sqrt{2}^{20}}{20!} \cos c_9$

$$\Rightarrow \left| \cos\sqrt{2} - \sum_{n=0}^{9} \frac{(-1)^n 2^n}{(2n)!} \right| = \frac{2^{10}}{20!} \underbrace{|\cos c_9|}_{\leq 1}$$

$$\leq \frac{2^{10}}{20!} = \underbrace{\frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}}_{<1} \underbrace{\frac{2}{5}}_{<1} \cdot \underbrace{\frac{2}{6}}_{<1} \cdots \underbrace{\frac{2}{10}}_{<1} \cdot \underbrace{\underbrace{\frac{1}{11}}_{<\frac{1}{10}} \cdots \underbrace{\frac{1}{20}}_{<\frac{1}{10}}}_{10 \text{ Mal}} < \frac{1}{10^{10}} \text{ q.e.d.}$$

(2a) $a_n = \frac{(-1)^n}{2^n n^{2/3}} \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{2^n \cdot n^{2/3}}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\underbrace{(\sqrt[n]{n})^{2/3}}_{\to 1}} \to \frac{1}{2}.$

Also $R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}} = 2.$ Deshalb

Für $|x-2| < 2 \Rightarrow$ Potenzreihe konvergent

$|x-2| > 2 \Rightarrow$ Potenzreihe divergent.

Nun $|x-2| = 2 \Leftrightarrow x-2 = \pm 2 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = 4$

$x=0 \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-2)^n}{2^n n^{\frac{2}{3}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n n^{\frac{2}{3}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$

was divergent ist weil $2/3 < 1$.

$x=4 \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{2^n n^{2/3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2/3}}$ was

konvergent ist nach Leibnitz Kriterium

konvergent ist nach Leibnitz Kriterium da $\frac{1}{n^{2/3}} \to 0$ und $\frac{1}{n^{2/3}}$ ist monoton fallend.

Insgesamt: Potenzreihe konvergiert $\iff x \in [0,4]$.

(2b) Für $x > 0$ gilt $x^{\log_{10} x} = 1000 x^2 \iff$

$$\underbrace{\log_{10}\left(x^{\log_{10} x}\right)}_{= \log_{10} x \cdot \log_{10} x} = \underbrace{\log_{10}\left(1000 x^2\right)}_{= \log_{10}(\underbrace{1000}_{=10^3}) + \log_{10}(x^2) = 3 + 2\log_{10}(x)}$$

Oder $x^{\log_{10} x} = 1000 x^2 \iff (\log_{10} x)^2 = 3 + 2\log_{10} x$.

Ist $y = \log_{10} x$ dann $y^2 = 3 + 2y \iff y^2 - 2y - 3 = 0$

$\iff (y-3)(y+1) = 0 \iff y = 3$ oder $y = -1$.

Also $\log_{10} x = 3$ oder $\log_{10} x = -1 \iff$

$x = 10^3 = 1000$ oder $x = 10^{-1} = 0{,}1$

(c) g ist stetig als Differenz stetiger Funktionen.

$g(0) = \underbrace{f(0)}_{>0} - 0 > 0$ da Bild $f \subset (0,1)$

$g(1) = \underbrace{f(1)}_{<1} - 1 < 0$ da Bild $f \subset (0,1)$

$\xrightarrow[\text{Zwischenwertsatz}]{g \text{ stetig}}$ $\exists\, x_0 \in (0,1)$ mit $g(x_0) = 0 \iff f(x_0) = x_0$ q.e.d.

(d) $\forall\, x \in D = [-1,1]$ ist $y = \arcsin(x)$ der Winkel in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ mit $\sin y = x$.

Also stimmt $\sin(\arcsin(x)) = x \quad \forall\, x \in D$

Winkel in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ mit $\sin y = x$.

Also stimmt $\sin(\arcsin(x)) = x \quad \forall x \in D$.

Die zweite Gleichheit stimmt nicht.

z.B. $\arcsin(\sin(2\pi)) = \arcsin(0) = 0 \neq 2\pi$.

Alternative Erklärung: arcsin hat immer Werte in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ also wenn $y \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ kann $\arcsin(\sin(y)) = y$ nicht gelten.

A3 a) (i)

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{t\to 1-}\int_0^t \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x\,dx = -\frac{du}{2}$$

$$= \lim_{t\to 1-}\int_1^{\sqrt{1-t^2}} \frac{-\frac{du}{2}}{\sqrt{u}}$$

$u = 1-x^2 \quad du = -2x\,dx$
$\Rightarrow x\,dx = -\frac{du}{2}$

$$= \lim_{t\to 1-}\int_{\sqrt{1-t^2}}^1 \frac{du}{2\sqrt{u}} = \lim_{t\to 1-}\left[\sqrt{u}\right]_{u=\sqrt{1-t^2}}^{u=1} = \lim_{t\to 1}\left(1-\sqrt{1-t^2}\right) = 1$$

(ii)

$$\int_0^1 \arccos x = \int_0^1 (x)' \arccos x\,dx$$

$$= \lim_{t\to 1-}\int_0^t (x)' \arccos x\,dx =$$

$$= \lim_{t\to 1-}\left(x\arccos x\Big|_{x=0}^{x=t} - \int_0^t x\underbrace{(\arccos x)'}_{= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}\,dx\right)$$

$$= \lim_{t\to 1-}\left(t\arccos t + \int_0^t \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\right)$$

$$= 1\arccos 1 + \int^1 \frac{x}{}\,dx \overset{(i)}{=} 1.$$

$$= \underbrace{1 \arccos 1}_{=0} + \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \overset{(i)}{=} 1.$$

(b) g ist in 0 nicht differenzierbar

$\Rightarrow g(0)$ soll betrachtet werden

$x>0 \Rightarrow \quad g(x) = (x-1)e^x \Rightarrow g'(x) = (x-1)'e^x + (x-1)(e^x)'$

$\Rightarrow g'(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x > 0.$

$x<0 \Rightarrow g(x) = (-x-1)e^x \Rightarrow g'(x) = (-x-1)'e^x + (-x-1)(e^x)'$

$= -e^x + (-x-1)e^x = (-x-2)e^x = 0 \Leftrightarrow x = -2$

und $-2 \in [-3,2]$.

Randpunkte $\rightarrow g(2) = (|2|-1)e^2 = e^2$

$\rightarrow g(-3) = (|-3|-1)e^{-3} = 2e^{-3}$

g nicht dbar in 0 $\rightarrow g(0) = -1e^0 = -1$

$g'(-2) = 0 \rightarrow g(-2) = (|-2|-1)e^{-2} = e^{-2}$

$\Rightarrow$

$\max g = \max\{g(-2), g(3), g(0), g(-2)\} = e^2.$

$\min g = \min\{g(-2), g(3), g(0), g(-2)\} = -1$

(c) Seien $f_1(x) = x \qquad f_2(x) = 1-x$

dann $f_1(0) = 0 \Rightarrow f_1 \in U \qquad f_2(1) = 1-1 = 0 \Rightarrow f_2 \in U.$

Aber $f_1(x) + f_2(x) = 1 \Rightarrow (f_1+f_2)(0) \neq 0$ und $(f_1+f_2)(1) \neq 0.$

Also $f_1 + f_2 \notin U$. Also ist U kein Unterraum von V.

(4 a)(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[z_3 \to z_3 - 2z_1]{z_2 \to z_2 - z_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{z_3 \to z_3 - z_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{z_2 \to \frac{1}{2} z_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{z_1 \to z_1 - z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(ii) $\left\{ \vec{x} : A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \text{Kern} A.$

Den Kern A können wir z.B mit dem -1 Ergänzungtrick bestimmen. Da

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

Ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ eine geignete Basis.

(iii) Die Zeilen von A sind nicht linear unabhängig da die Zeilennormalform von A eine Nullzeile hat, (und diese Linearkombination der Zeilen von A ist).

(b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig

da $a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a+b=0 & (1) \\ a+b+c=0 & (2) \\ a+c=0 & (3) \end{cases}$

da $a\begin{pmatrix} \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=0 & (2) \\ a+c=0 & (3) \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} (2)-(1) \Rightarrow c=0 \\ (2)-(3) \Rightarrow b=0 \end{array}\right\} \overset{(1)}{\Longrightarrow} a=b=c=0.$$

Deshalb wäre Bild B 3-dimensional/
Das ist aber nicht möglich da
$\text{Bild}\,B = \text{lin}\{\text{Spalten von } B\} \Rightarrow$
$\dim \text{Bild}\,B \leq 2$ (da B 2 Spalten hat)
Deshalb gibt es keine solche Matrix B.

(c)

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 \\ \Rightarrow \vec{v}\cdot\vec{v}_1 = a_1 \underbrace{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1}_{=\|\vec{v}_1\|^2=1} + a_2 \underbrace{\vec{v}_2\cdot\vec{v}_1}_{=0 \text{ da } \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2} = a_1. \\ \text{Ähnlich } \vec{v}\cdot\vec{v}_2 = a_1 \underbrace{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2}_{\substack{=0 \\ \text{da } \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2}} + a_2 \underbrace{\vec{v}_2\cdot\vec{v}_2}_{=\|\vec{v}_2\|^2=1} = a_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\vec{v} = (\vec{v}\cdot\vec{v}_1)\vec{v}_1 + (\vec{v}\cdot\vec{v}_2)\vec{v}_2.$$