Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. Ioannis Anapolitanos
Dr. Michael Hofacker

Frühjahr 2023
06.03.2023

Modulprüfung / Bachelor

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Aufgabe 1 (4 + 8 + 8 = 20 Punkte)

a) Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil aller Lösungen der Gleichung $z^3 = 1$.

b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

c) Wir betrachten die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \log_3(x) + x$.

(i) Zeigen Sie, dass $f(\frac{1}{2}) < 0$.
<u>**Hinweis**</u>: Sie können die Monotonie der Funktion $x \mapsto 3^x$ verwenden.

(ii) Zeigen Sie mit Hilfe des Teils **(i)**, dass f genau eine Nullstelle in $(\frac{1}{2}, 1)$ hat.

Aufgabe 2 (10 + 4 + 4 = 18 Punkte)

a) Wir betrachten die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) := \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

(i) Zeigen Sie mit dem Taylorsatz, dass es für alle $x \in \mathbb{R}$ ein c zwischen 0 und x gibt mit

$$F(x) = x + e^{-\frac{c^2}{2}}(c^2 - 1)\frac{x^3}{3!}.$$

(ii) Zeigen Sie mit Hilfe des Teils **(i)**, dass

$$\frac{5}{6} < \int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt < 1.$$

b) Geben Sie eine **divergente** Folge $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ an so, dass $|s_{N+1} - s_N| \to 0$, wenn $N \to \infty$. Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Wir betrachten die komplexe Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - 1 - i)^n,$$

wobei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von komplexen Zahlen ist. Gegeben ist, dass die Potenzreihe konvergiert, wenn $z = 2$. Ein Student behauptet, dass aus den gegebenen Informationen folgt, dass die Potenzreihe für $z = \frac{i}{2}$ konvergiert. Hat der Student Recht? Begründen Sie Ihre Antwort.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (6 + 8 + 4 = 18 Punkte)

a) Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\int_0^{\sqrt{\pi}} x^3 \cos(x^2)\, dx$. Substituieren Sie zunächst geeignet und integrieren Sie danach partiell.

b) **(i)** Zeigen Sie, dass der folgende Grenzwert in $\mathbb{R}$ existiert und bestimmen Sie diesen

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\cos(x)}.$$

(ii) Zeigen Sie, dass das folgende uneigentliche Integral konvergent ist

$$\int_0^{\pi/2} (\tan x) \sqrt{\frac{\pi}{2} - x}\, dx.$$

<u>**Hinweis**</u>: Sie können die Existenz des Grenzwertes im Teil **(i)** verwenden.

c) Untersuchen Sie, ob die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{\frac{3}{2}} \cos(x^{-1}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

differenzierbar in 0 ist und bestimmen Sie $f'(0)$ gegebenenfalls.

Aufgabe 4 (6 + 10 + 8 = 24 Punkte)

a) Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist. Geben Sie einen Beweis oder ein begründetes Gegenbeispiel an: Ist V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $v, v_1, \ldots, v_n \in V$ mit $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linear abhängig, dann sind $v_1 + v, v_2 + v, \ldots, v_n + v$ ebenso linear abhängig.

b) Wir betrachten die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und den Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ c \end{pmatrix}.$$

(i) Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist der Vektor $\vec{b}$ im Bild A? Begründen Sie Ihre Antwort.

(ii) Bestimmen Sie eine Basis von Kern A.

c) Wir betrachten die Vektoren $\vec{v_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(i) Zeigen Sie, dass $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ ein Orthonormalsystem in $\mathbb{R}^3$ bilden.

(ii) Wir betrachten den Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ und die Ebene $U = \operatorname{lin}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$. Bestimmen Sie den kleinsten Abstand von $\vec{w}$ zu U, d.h.

$$\min_{\vec{x} \in U} \|\vec{w} - \vec{x}\|.$$

Viel Erfolg!