1 a) $z^3 = 1 \iff z^3 = e^{i0}$

Also sind $z_k = e^{\frac{2\pi k i}{3}}$, $k = 0, 1, 2$ die Lösungen der Gleichung.

$z_0 = e^{\frac{2\pi 0 i}{3}} = 1$, also $\operatorname{Re} z_0 = 1$, $\operatorname{Im} z_0 = 0$

$z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

also $\operatorname{Re} z_1 = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{Im} z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

also $\operatorname{Re} z_2 = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{Im} z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1 b) Für $n=1$ $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{(2\cdot 1-1)(2\cdot 1+1)} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2\cdot 1+1}$ ✓

Annahme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$ (*) für ein $n \in \mathbb{N}$

z.z. $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n+1}{2n+3}$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)}$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(2n+3)}{(2n+1)(2n+3)} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$= \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n^2+2n+n+1}{(2n+1)(2n+3)} =$$

$$= \frac{2n(n+1)+(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} \;\; \frac{n+1 \text{ aus-}}{\text{klammern}} \;\; \frac{(n+1)\cancel{(2n+1)}}{\cancel{(2n+1)}(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3} \text{ q.e.d}$$

1a)(i) $f\left(\frac{1}{2}\right)<0 \Leftrightarrow \log_3\left(\frac{1}{2}\right) < -\frac{1}{2} \xLeftrightarrow[\text{monoton wachsend}]{3^x \text{ streng}}$

$3^{\log_3\left(\frac{1}{2}\right)} < 3^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}} \xLeftrightarrow{\sqrt{3},2>0}$

$\sqrt{3} < 2 \xLeftrightarrow{\sqrt{3},2>0} (\sqrt{3})^2 < 2^2 \Leftrightarrow 3<4$

was stimmt, deshalb stimmt, dass $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.

1c)(ii) $\left.\begin{array}{l} f(1) = \underbrace{\log_3(1)}_{=0} + 1 = 1 > 0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \text{ nach Teil (i)} \\ f \text{ ist stetig als Summe stetiger Funktionen} \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{satz}]{\text{Zwischenwert}}$

f hat mindestens eine Nullstelle in $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Aber $f'(x) = \left(\frac{\ln x}{\ln 3}\right)' + (x)' = \frac{1}{x\ln 3} + 1 > 0$

auf $(0,\infty)$ also ist f streng monoton wachsend und deshalb injektiv. Es folgt, dass f genau eine Nullstelle in $(0,\infty)$ hat.

2 a)(i) Nach Taylor $\forall x\in\mathbb{R}\ \exists c\in\mathbb{R}$ zwischen $0, x$ mit

$$F(x) = F(0) + F'(0)x + F''(0)\frac{x^2}{2!} + F'''(c)\frac{x^3}{3!} \quad (1)$$

Aber

$$F(0) = \int_0^0 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = 0$$

$$\underbrace{F'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}}_{\text{nach Hauptsatz}} \Rightarrow F'(0) = 1 \quad (2)$$

$$F''(x) = \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' = -xe^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow F''(0) = 0 \quad (3)$$

$$F'''(x) = \left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)' = -e^{-\frac{x^2}{2}} + (-x)^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow F'''(c) = (c^2-1)e^{-\frac{c^2}{2}} \quad (4)$$

$$(2),(3),(4) \to (1) \Rightarrow F(x) = 0 + 1x + 0\frac{x^2}{2} + (c^2-1)e^{-\frac{c^2}{2}}\frac{x^3}{3!}$$

oder $F(x) = x + e^{-\frac{c^2}{2}}(c^2-1)\frac{x^3}{3!}$ q.e.d.

2 a)(ii) $\int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}}dt = F(1) \overset{(i)}{=} 1 + e^{-\frac{c^2}{2}}(c^2-1)\frac{1^3}{3!}, \ c \in (0,1) \quad (5)$

Aber $c \in (0,1) \Rightarrow c^2 \in (0,1) \Rightarrow (c^2-1) \in (-1,0)$.

Ferner $0 < e^{-\frac{c^2}{2}} < 1$ $\Rightarrow$

Da Exponentialfunktion nur positive Werte annimmt   da $c>0$

$$e^{-\frac{c^2}{2}}(c^2-1) \in (-1,0) \Rightarrow e^{-\frac{c^2}{2}}(c^2-1)\frac{1}{3!} \in \left(-\frac{1}{6},0\right)$$

$$\Rightarrow \quad 1 + e^{-\frac{c^2}{2}}(c^2-1)\frac{1}{3!} \in \left(\frac{5}{6},1\right) \overset{(5)}{\Longrightarrow}$$

$$\int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}}dt \in \left(\frac{5}{6},1\right) \text{ q.e.d.}$$

2(b) Sei $S_N = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$ die Folge der partiellen Summen der harmonischen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.
Da die harmonische Reihe divergiert, ist $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ nach Definition divergent. Dennoch

$$|S_{N+1} - S_N| = \left|\sum_{n=1}^{N+1}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{N+1} \longrightarrow 0 \text{ q.e.d.}$$

2(c) $|2-1-i| = |1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$.

und da die Potenzreihe für $z=2$ konvergiert gilt $|2-1-i| \leq R \Rightarrow R \geq \sqrt{2}$, wobei R der Konvergenzradius der Potenzreihe ist. Aber

$$\left|\frac{i}{2}-1-i\right| = \left|-1-\frac{i}{2}\right| = \sqrt{(-1)^2+(-\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} < \sqrt{2} = R.$$

Also ist der Abstand zwischen $\frac{i}{2}$ und dem Entwicklungspunkt $1+i$ kleiner als der Konvergenzradius $R \Rightarrow$ Reihe konvergent für $z=\frac{i}{2} \Rightarrow$ Student hat Recht.

3a)

$$I := \int_0^{\sqrt{\pi}} x^3 \cos(x^2)\,dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} \underbrace{x^2}_{u} \cos(\underbrace{x^2}_{u})\, \underbrace{x\,dx}_{\frac{du}{2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} u=x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx \Rightarrow x\,dx = \frac{du}{2}. \\ x=0 \Rightarrow u=0, \quad x=\sqrt{\pi} \Rightarrow u=\pi \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$I = \int_0^{\pi} u\cos u \,\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} u(\sin u)'\,du =$$

$$\frac{1}{2}\left([u\sin u]_{u=0}^{u=\pi} - \int_0^{\pi} (u)'\sin u\,du \right) \quad \frac{\sin 0 = 0}{\sin\pi = 0}$$

$$\frac{1}{2}\left(0 - \int_0^{\pi}\sin u\,du\right) = \frac{1}{2}\cos u\Big|_{u=0}^{u=\pi} = \frac{1}{2}(\underbrace{\cos\pi}_{=-1} - \underbrace{\cos 0}_{=1}) = -1.$$

3b(i)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{x-\frac{\pi}{2}}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{x-\frac{\pi}{2}}{\cos x - \cos\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\frac{\cos x - \cos\frac{\pi}{2}}{x-\frac{\pi}{2}}}$$

Aber $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \cos\frac{\pi}{2}}{x-\frac{\pi}{2}} = (\cos x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = -\sin x\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$ $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{x-\frac{\pi}{2}}{\cos x} = \frac{1}{-1} = -1.$$

3b(ii) Auf $[0,\frac{\pi}{2})$ gilt $\left|\tan x\sqrt{\frac{\pi}{2}-x}\right| = \underbrace{|\sin x|}_{\le 1}\underbrace{\left|\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\cos x}\right|}_{\le \max|g|}\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}-x}}$, wobei

$g:[0,\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} \frac{x-\frac{\pi}{2}}{\cos x}, & x \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ -1, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ stetig ist in $\frac{\pi}{2}$ wegen (i) und stetig auf $[0,\frac{\pi}{2})$ als Quotient stetiger Funktionen (und da $\cos x \neq 0$ auf $[0,\frac{\pi}{2})$). Also ist g stetig auf $[0,\frac{\pi}{2}]$ $\Rightarrow$ g ist beschränkt.

Also $\left|\tan x \sqrt{\frac{\pi}{2}-x}\right| \le \frac{C}{\sqrt{\frac{\pi}{2}-x}}$ (6), wobei $C = \max|g| < \infty$.

Aber $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}-x}}\,dx = \lim_{r\to\frac{\pi}{2}-} \int_0^r \frac{1}{\sqrt{\underbrace{\frac{\pi}{2}-x}_{u}}} \underbrace{dx}_{-du} =$

$= \lim_{r\to\frac{\pi}{2}-} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-r} \frac{1}{\sqrt{u}}(-du) = \lim_{r\to\frac{\pi}{2}-} \int_{\frac{\pi}{2}-r}^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{u}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{u}}.$

Da $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{u}}$ konvergiert ist $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}-x}}\,dx$ auch konvergent. Deshalb ist nach (6) und Majorantenkriterium $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\tan x)\sqrt{\frac{\pi}{2}-x}\,dx$ ebenso konvergent.

---

3 c) $\forall x \neq 0$ gilt $\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| = \left|\frac{|x|^{\frac{3}{2}}\cos(x^{-1})-0}{x}\right| = |x|^{\frac{1}{2}} \underbrace{|\cos(x^{-1})|}_{\le 1} \le |x|^{\frac{1}{2}}$

und da $\lim_{x\to 0} |x|^{\frac{1}{2}} = 0$ bekommen wir $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$

Also ist f differenzierbar in 0, und $f'(0) = 0$.

4 a) Die Aussage ist falsch. Sei z.B. $V = \mathbb{R}^2$, $n = 2$

$v = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$. Dann sind v_1, v_2 linear abhängig, weil $v_2 - 2v_1 = 0$. Dennoch sind

$v_1 + v = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $v_2 + v = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ nicht linear abhängig

da $a\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a+3b=0 \\ a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+3b=0 \\ a=-b \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -2b+3b=0 \\ a=-b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=-b \end{cases} \Rightarrow a=b=0.$

4b)(i) $(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & c \end{array}\right) \xrightarrow[z_3 \to z_3 - z_1]{z_2 \to z_2 - z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & c-1 \end{array}\right) \xrightarrow[z_1 \to z_1 - z_2]{z_3 \to z_3 - 2z_2}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c-1 \end{array}\right).$

Die letzte Matrix ist in Zeilennormalform also

$\vec{b} \in Bild(A) \iff c-1=0 \iff c=1.$

4b)(ii) Da wir A bereits in Zeilennormalform gebracht haben, haben wir nach -1 Ergänzungstrick.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Also $Kern\, A = lin\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ ist eine Basis von Kern A.

4c)(i) $\|\vec{v}_1\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1.$

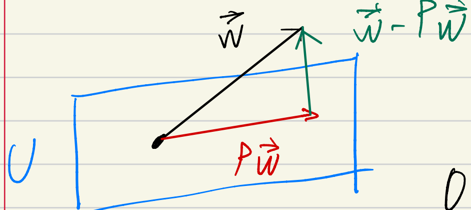
$\|\vec{v}_2\| = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1$

Vektoren normiert

$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{6}} (1 + (-1) + 0) = 0$ Vektoren Orthogonal $\Rightarrow$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ bilden ein ONS in $\mathbb{R}^3$.

4c)(ii)



Der kleinste Abstand von $\vec{w}$ zu U ist $\|\vec{w} - P\vec{w}\|$, wobei $P\vec{w}$ die Orthogonalprojektion von $\vec{w}$ zu U ist (siehe Skizze). Aber $U = lin\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ und nach Teil (i) ist $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ ein ONS. Also

$P\vec{w} = (\vec{w} \cdot \vec{v}_1)\vec{v}_1 + (\vec{w} \cdot \vec{v}_2)\vec{v}_2 = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \left[\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{2} \cdot 6 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} (6+6) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Also $\|\vec{w} - P\vec{w}\| = \left\| \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$

also ist der kleinste Abstand von $\vec{w}$ zu V gleich $\sqrt{6}$.