Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
PD Dr. Ioannis Anapolitanos
Dr. Michael Hofacker

Frühjahr 2024
04.03.2024

Modulprüfung / Bachelor

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Aufgabe 1 (4 + 4 + 6 + 4 = 18 Punkte)

a) Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil der Zahl $(1-\sqrt{3}i)^{12}$.

b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, wobei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie anhand der Definition der Ableitung, dass $f'(x) = nx^{n-1}$.

c) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{4+n^4} - n^2).$$

d) Zeigen Sie, dass die Zahl $\log_3(8)\log_{\sqrt{8}}(9)$ eine ganze Zahl ist und bestimmen Sie diese.

Aufgabe 2 (6 + 3 + 4 + 6 = 19 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sqrt{x}$ und die Folge

$$a_n = (-1)^{n+1} \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!}.$$

a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f^{(n)}(x) = a_n x^{-\frac{2n-1}{2}} .$$

b) Sei $x > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie mit Hilfe des Teils **a)** und unter Verwendung des Satzes von Taylor, dass es ein c zwischen 1 und x gibt, sodass

$$f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k!}(x-1)^k + \frac{a_{n+1}}{(n+1)!} c^{-\frac{2n+1}{2}} (x-1)^{n+1} .$$

c) Zeigen Sie unter Verwendung des Binomialsatzes, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{(2n)!}{n!n!} < 2^{2n}.$$

d) Zeigen Sie mit Hilfe der Teile **b)** und **c)**, dass

$$\sqrt{2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k!}.$$

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (8 + 6 + 6 = 20 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := xe^x - 1$ genau eine Nullstelle besitzt. Bestimmen Sie außerdem das globale Minimum von f.

b) Bestimmen Sie den Wert des Integrals

$$\int_1^4 \frac{\ln(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\, dx.$$

Substituieren Sie zunächst geeignet und integrieren Sie danach partiell.

c) Zeigen Sie, dass das folgende uneigentliche Integral konvergent ist:

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^4 - 1}}\, dx\,.$$

Aufgabe 4 (8 + 11 + 4 = 23 Punkte)

a) **(i)** Bestimmen Sie mittels Zeilenumformungen die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

(ii) Erklären Sie, warum der Algorithmus vom Teil **(i)** die inverse Matrix liefert. Die Erklärung kann anhand des konkreten Beispieles sein, muss aber klären, was hinter dem Algorithmus steckt.

b) Wir betrachten die Matrix $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ und die Menge

$$D = \{\vec{b} \in \mathbb{R}^3 :\ \text{Die Gleichung } C\vec{x} = \vec{b} \text{ ist lösbar}\}.$$

(i) Zeigen Sie, <u>mittels der Definition des Unterraums</u>, dass D ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ist.

(ii) Bestimmen Sie die Orthogonalprojektion des Vektors $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ auf D.

c) Zeigen Sie, dass es <u>keine</u> Matrizen $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ und $B \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ gibt, sodass

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>**Hinweis:**</u> Die Dimensionsformel kann hilfreich sein.

Viel Erfolg!