(1a) $|1-\sqrt{3}i| = \sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2} = 2.$

und da $\operatorname{Im}(1-\sqrt{3}i) = -\sqrt{3} < 0$ gilt

$$1-\sqrt{3}i = 2e^{i\theta}$$

wobei $\theta = -\arccos \frac{\operatorname{Re}(1-\sqrt{3}i)}{|1-\sqrt{3}i|} = -\arccos\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{3}.$

Also $1-\sqrt{3}i = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$. Deshalb

$$(1-\sqrt{3}i)^{12} = \left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{12} = 2^{12}\, e^{-i\frac{\pi}{3}\cdot 12} = 2^{12}\underbrace{e^{-i4\pi}}_{=1} = 2^{12}$$

Deshalb $\operatorname{Re}\left[(1-\sqrt{3}i)^{12}\right] = 2^{12}$

$\operatorname{Im}\left[(1-\sqrt{3}i)^{12}\right] = 0.$

(1b) Ist $x_0 \in \mathbb{R}$ dann

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)\sum_{k=0}^{n-1} x_0^k x^{n-1-k}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \sum_{k=0}^{n-1} x_0^k x^{n-1-k}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} x_0^{n-1}}_{n-\text{Terme}} = n x_0^{n-1}.$$ Also $f'(x_0) = n x_0^{n-1}$ $\forall x_0 \in \mathbb{R}.$

(1c) $$\sqrt{4+n^4} - n^2 = \frac{(\sqrt{4+n^4}-n^2)(\sqrt{4+n^4}+n^2)}{\sqrt{4+n^4}+n^2}$$

$$\underset{(A-B)(A+B)=A^2-B^2}{\overset{\text{Da}}{=}} \frac{4+n^4-n^4}{\sqrt{4+n^4}+n^2} = \frac{4}{n^2\underbrace{\left(\sqrt{1+\frac{4}{n^4}}+1\right)}_{\geq 1}} \leq \frac{4}{n^2} \quad (1)$$

Ferner $\sqrt{4+n^4} \geq \sqrt{n^4} = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ also

$\sqrt{4+n^4} - n^2 \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Deshalb

$$\left|\sqrt{4+n^4} - n^2\right| = \sqrt{4+n^4} - n^2 \overset{(1)}{\leq} \frac{4}{n^2}.$$

und da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$ konvergiert, konvergiert

ebenso $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{4+n^4} - n^2\right)$ nach Majorantenkriterium.

1d)

$$\log_3(8)\log_{\sqrt{8}}(9) = \frac{\ln 8}{\ln 3} \cdot \frac{\ln 9}{\ln \sqrt{8}} = \frac{\ln 8}{\ln \sqrt{8}} \frac{\ln 9}{\ln 3}.$$

$$= \underbrace{\log_{\sqrt{8}}(8)}_{=2 \text{ da } \sqrt{8}^2 = 8} \log_3(9) = 2 \underbrace{\log_3(9)}_{=2 \text{ da } 3^2 = 9} = 4.$$

2.a)

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^{1/2}\right)' = \frac{1}{2} x^{-1/2} \\ a_1 \cdot x^{-\frac{2\cdot 1 - 1}{2}} &= (-1)^{1+1} \frac{(2\cdot 1 - 2)!}{2^{2\cdot 1 - 1}(1-1)!} x^{-\frac{1}{2}} = 1 \cdot \frac{0!}{2^1 0!} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$f^{(1)}(x) = a_1 \cdot x^{-\frac{2\cdot 1 - 1}{2}} \Longrightarrow$ Für $n=1$ Aussage stimmt.

Annahme $f^{(n)}(x) = a_n x^{-\frac{2n-1}{2}}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (*)

z.z $f^{(n+1)}(x) = a_{n+1} x^{-\frac{2(n+1)-1}{2}} = a_{n+1} x^{-\frac{2n+1}{2}}$ (2)

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' \overset{(*)}{=} a_n \left(x^{-\frac{2n-1}{2}}\right)'$$

$$= a_n (-1)\frac{2n-1}{2} \quad x^{-\frac{2n-1}{2}-1} = a_n (-1)\frac{2n-1}{2} \, x^{-\frac{2n-1+2}{2}}$$

$$\Longrightarrow \qquad f^{(n+1)}(x) = a_n (-1)\frac{2n-1}{2} \, x^{-\frac{2n+1}{2}}. \quad (3)$$

Aber

$$a_n (-1)\frac{2n-1}{2} = (-1)^{n+1} \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!} (-1) \frac{2n-1}{2}$$

$$= (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!}{2^{2n} \cdot (n-1)!} = (-1)^{n+2} \frac{(2n-1)!}{2^{2n}(n-1)!} \cdot \frac{2n}{2n}$$

$$= (-1)^{n+2} \frac{(2n)!}{2^{2n+1} \cdot n!} \Longrightarrow a_n (-1)\frac{2n-1}{2} = a_{n+1} \quad (4)$$

$$(3),(4) \Longrightarrow \qquad f^{(n+1)}(x) = a_{n+1} \, x^{-\frac{2n+1}{2}} \qquad \text{q.e.d.}$$

2b) $f \in C^\infty((0,\infty))$. Deshalb nach Satz von Taylor $\exists\, c$ zwischen 1 und x mit

$$f(x) = f(1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(1)}{k!} (x-1)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-1)^{n+1}.$$

Aber $f(1) = \sqrt{1} = 1$, und nach Teil a

$f^{(k)}(1) = a_k$, $\quad f^{(n+1)}(c) = a_{n+1} \, c^{-\frac{2n+1}{2}}$. Deshalb

$$f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k!} (x-1)^k + \frac{a_{n+1}}{(n+1)!} c^{-\frac{2n+1}{2}} (x-1)^{n+1}$$

(2c) $$2^{2n} = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} 1^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}$$

$$\Longrightarrow 2^{2n} > \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!}$$

wobei die echte Ungleichung gilt weil alle Binomialkoeffizienten positiv sind.

(2d) Sei $n \in \mathbb{N}$. Nach Teil (b) $\exists\, c_n \in (1,2)$ mit

$$\sqrt{2} = f(2) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k!}(2-1)^k + \frac{a_{n+1}}{(n+1)!} c_n^{-\frac{2n+1}{2}} (2-1)^{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{2} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k!} + \frac{a_{n+1}}{(n+1)!} c_n^{-\frac{2n+1}{2}}.$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{2} - \frac{a_{n+1}}{(n+1)!} c_n^{-\frac{2n+1}{2}} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k!} \quad (5).$$

Aber
$$\left| \frac{a_{n+1}}{(n+1)!} \underbrace{c_n^{-\frac{2n+1}{2}}}_{\in (0,1) \text{ da } c_n > 1} \right| \leq \frac{|a_{n+1}|}{(n+1)!} = \frac{(2n)!}{2^{2n+1} n!} \cdot \frac{1}{(n+1)!}$$

$$= \underbrace{\frac{(2n)!}{n! \cdot n!} \cdot \frac{1}{2^{2n}}}_{\leq 1 \text{ wegen Teil (c)}} \cdot \frac{1}{2(n+1)} \leq \frac{1}{2(n+1)} \longrightarrow 0.$$

Also
$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)!} c_n^{-\frac{2n+1}{2}} \xrightarrow{n \to \infty} 0. \quad (6)$$

Deshalb wenn wir in (5) den $\lim_{n\to\infty}$ auf beiden Seiten ziehen und (6) verwenden bekommen wir

$$\sqrt{2} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k!}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k!}.$$

(3a) $f'(x) = (xe^x - 1)' = (xe^x)' = (x)'e^x + x(e^x)' = (x+1)e^x.$

Also $\left.\begin{array}{ll} f'(x) < 0 & \text{wenn } x < -1 \\ f'(x) > 0 & \text{wenn } x > -1 \end{array}\right\} \Longrightarrow$

f ist streng monoton fallend in $(-\infty, -1)$ und streng monoton wachsend in $(-1, \infty)$. Also ist $f(-1) = -1e^{-1} - 1 = -1 - \frac{1}{e}$ das globale Minimum von f.

Nun beobachten wir, dass

$f(x) = xe^x - 1 < 0 \quad \forall\ x \leq 0.$ (7)

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0 \cdot e^0 - 1 = -1 < 0 \\ f(1) = e - 1 > 0 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{Zwischenwertsatz}]{f \text{ stetig}}$$

$\exists\ c \in (0,1)$ $f(c) = 0$. Da aber f streng monoton wachsend ist in $(0, \infty)$ hat f genau eine Nullstelle in $(0, \infty)$.

$\overset{(7)}{\Longrightarrow}$ f hat genau eine Nullstelle (in $\mathbb{R}$).

(3b) $$\int_1^4 \frac{\ln(\overset{u}{\sqrt{x}})}{2\sqrt{x}}\,dx = \int_1^2 \ln u\, du = \int_1^2 (u)' \ln u\, du$$

$$\left(\begin{array}{l} u = \sqrt{x} \\ du = (\sqrt{x})' dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx \\ x = 1 \Rightarrow u = 1, \quad x = 4 \Rightarrow u = 2 \end{array} \right)$$

$$= u \ln u \Big|_1^2 - \int_1^2 u (\ln u)' du$$

$$= 2\ln 2 - \underbrace{1 \ln 1}_{=0} - \int_1^2 1\, du$$

$$\Rightarrow \quad \int_1^4 \frac{\ln(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\,dx = 2\ln 2 - u\Big|_1^2 = 2\ln 2 - 1$$

(3c) $$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}\,dx + \int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}\,dx.$$

Auf $[2,\infty)$ gilt $\frac{x^4}{2} \geq 1 \Rightarrow \quad x^4 - 1 \geq \frac{x^4}{2}$.

Also $$\frac{1}{\sqrt{x^4-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{x^4}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{x^2}.$$

und da $\int_2^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ konvergiert. konvergiert $\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}\,dx$ nach Majorantenkriterium.

Ferner auf $(1,2)$ gilt
$$x^4-1 = (x^2)^2 - 1^2 = \underbrace{(x^2-1)}_{>0}\underbrace{(x^2+1)}_{>1} > x^2 - 1^2 = \underbrace{(x-1)}_{>0}\underbrace{(x+1)}_{>1} > x-1.$$

Also $$\frac{1}{\sqrt{x^4-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x-1}} \quad (8)$$

Aber $$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = \lim_{t\to 1+} \int_t^2 \frac{1}{\sqrt{\underbrace{x-1}_{u}}}\,dx = \lim_{t\to 1+} \int_{t-1}^1 \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}}\,du$$

konvergiert. Deshalb konvergiert
$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}\,dx$ nach (8) und Majorantenkriterium. Also konvergiert $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}\,dx$.

4a) (i) $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{z_2 \to z_2 - 2z_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{z_1 \to z_1 - z_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{z_2 \to \frac{1}{2} z_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$ also $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(ii) Oben lösen wir $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gleichzeitig. Wenn wir die 4-te Spalte ignorieren

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{umformungen}]{\text{gleiche Zeilen}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$.

Also $A\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ wobei $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

ähnlich $A\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, wobei $x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

Deshalb $A\left(\vec{x}_1 \mid \vec{x}_2\right) = \left(A\vec{x}_1 \mid A\vec{x}_2\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(4b). $\vec{0} \in D$ da $C\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$ deshalb $C\vec{x} = \vec{0}$ lösbar.

Seien $\vec{b}_1, \vec{b}_2 \in D$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. z.z. $\vec{b}_1 + \vec{b}_2 \in D$, $\lambda\vec{b}_1 \in D$.

Da $\vec{b}_1, \vec{b}_2 \in D$ $\exists$ $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{R}^2$ mit

$$\left.\begin{array}{l} C\vec{x}_1 = \vec{b}_1 \\ C\vec{x}_2 = \vec{b}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} C\vec{x}_1 + C\vec{x}_2 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 \\ \lambda C\vec{x}_1 = \lambda\vec{b}_1 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} C(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 \\ C(\lambda\vec{x}_1) = \lambda\vec{b}_1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} C\vec{x} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 \\ C\vec{x} = \lambda\vec{b}_1 \end{array}\right. \text{ beide lösbar}$$

$\Rightarrow \vec{b}_1 + \vec{b}_2, \lambda\vec{b}_1 \in D$ q.e.d.

(2b) ii) $D = \text{Bild}\, C = \text{lin}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$. (die 2 Vektoren sind linear unabhängig, da sie nicht parallel sind).

ONB von D mit Gram-Schmidt Verfahren.

$$\vec{b}_1 = \frac{1}{\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\|}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

$$\vec{c}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\vec{b}_1\right)\vec{b}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\left(\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{=6}\right)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{b}_2 = \frac{\vec{c}_2}{\|\vec{c}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$ Da $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ ONB von D.

ist die Orthogonalprojektion

$$(\vec{w}\cdot\vec{b}_1)\vec{b}_1 + (\vec{w}\cdot\vec{b}_2)\vec{b}_2 = \frac{1}{3}\left[\underbrace{\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{=4+2=6}\right]\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left[\underbrace{\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}}_{=-4+2=-2}\right]\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

$$= 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}.$$

(4c) Lösung 1:

$\dim \text{Kern}\, B + \dim \text{Bild}\, B = 3$. (9) Da aber $B \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ ist $\text{Bild}\, B \subseteq \mathbb{R}^2 \Rightarrow \dim \text{Bild}\, B \leq 2$.

$\overset{(9)}{\Longrightarrow} \dim \text{Kern}\, B \geq 1$, also $\exists\ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ mit $B\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow A(B\vec{v}) = \vec{0} \Rightarrow (AB)\vec{v} = \vec{0}$

$\Longrightarrow \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$ was $\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$

widerspricht. Deshalb ist $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ unmöglich.

Lösung 2:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Bild}(AB) = \mathbb{R}^3 \quad (10)$$

Da $AB\vec{v} = \vec{v}$ $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Aber da A zwei Spalten hat gilt

$$\dim \text{Bild}(A) \leq 2 \quad (11)$$

Aber

$$\text{Bild}(AB) = \{A\underbrace{B\vec{v}}_{\in \mathbb{R}^2} : \vec{v} \in \mathbb{R}^3\} \subseteq \{A\vec{y} : \vec{y} \in \mathbb{R}^2\} = \text{Bild}\, A$$

$\Rightarrow$ $\text{Bild}(AB) \subseteq \text{Bild}\, A$ was mit (10), (11) Widerspruch liefert. Deshalb ist $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ unmöglich.