Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski

Herbst 2010
21.09.2010

Diplom–Vorprüfung bzw. Bachelor–Modulprüfung

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen und Geodäsie

Aufgabe 1 (10 Punkte)

a) Geben Sie alle komplexen Zahlen z an, die

$$(1-i)^5 = z^4$$

erfüllen.

b) Zeigen Sie für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$

$$\operatorname{Im}(z) \leqslant 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left| \frac{z+i}{iz+1} \right| \leqslant 1\,.$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

a) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz:

i) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\sqrt{k}+1)^2}{k^2+\sqrt{k^4-1}}$;

ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\, n!}{n^n}$.

b) Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto \frac{x}{x+2}\,.$$

i) Zeigen Sie mit Hilfe von vollständiger Induktion, dass f auf $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ beliebig oft differenzierbar ist und dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f^{(n)}(x) = 2\,\frac{(-1)^{n+1}\, n!}{(x+2)^{n+1}}\,, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}\,.$$

ii) Geben Sie die Taylorreihe von f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an. Welchen Konvergenzradius hat diese Potenzreihe?

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\arctan x} - \cos^2 x}{x}$;

ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{(x^3)} - 1}{x(1-\cos x)}$.

b) Gegeben sei die Funktion

$$f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto \sqrt{x}\,\ln x\,.$$

i) Zeigen Sie: f ist auf $[\frac{1}{e},\infty)$ streng monoton wachsend und es gilt

$$f([\tfrac{1}{e}, e^2]) = [-\tfrac{1}{\sqrt{e}}, 2e]\,.$$

ii) Begründen Sie, dass die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon [-\frac{1}{\sqrt{e}}, 2e] \to [\frac{1}{e}, e^2]$ im Punkt $\sqrt{e}$ differenzierbar ist, und bestimmen Sie

$$f^{-1}(\sqrt{e}) \qquad \text{sowie} \qquad (f^{-1})'(\sqrt{e})\,.$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt$;

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\,dx$;

c) $\displaystyle\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{1+\cos x}\,dx$.

Hinweis zu c): Schreiben Sie $\cos x = \cos(\frac{x}{2} + \frac{x}{2})$ und verwenden Sie dann das passende Additionstheorem.

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:
Die Klausurergebnisse hängen ab Mittwoch, den 13.10.2010, am Schwarzen Brett neben Zimmer 3A-17 (Allianz-Gebäude 05.20) aus und liegen unter

`www.math.kit.edu/iana1`

im Internet. Die **Klausureinsicht** findet am Mittwoch, den 20.10.2010, von 16:00 bis 18:00 Uhr im Daimler-Hörsaal statt. Die mündlichen Nachprüfungen sind in der Woche vom 25.10.2010 bis 29.10.2010 im Allianz-Gebäude 05.20.