Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski

Herbst 2010
21.09.2010

Diplom–Vorprüfung bzw. Bachelor–Modulprüfung

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen und Geodäsie

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

Lösungen HMI

A1 a) Mit $z = \rho e^{i\varphi}$ $(\rho > 0)$, $1-i = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$ bedeutet

$(1-i)^5 = z^4$ die Gleichung für ρ und φ: $\underline{2^{\frac{5}{2}} e^{-i\frac{5\pi}{4}} = \rho^4 e^{4i\varphi}}$.

$\Rightarrow$ $\underline{\rho = 2^{\frac{5}{8}}, \ \varphi_k = -\frac{5\pi}{16} + \frac{k}{2}\pi, \ k = 0, 1, 2, 3}$, so dass

$\underline{z_k = 2^{\frac{5}{8}} e^{i\varphi_k}, \ k = 0, 1, 2, 3,}$ die verschiedenen Lösungen der vorgelegten Gleichung sind.

b) $\left|\frac{z+i}{iz+1}\right| \le 1 \iff |z+i| \le |iz+1|$

$$\iff \underbrace{|z+i|^2}_{= |z|^2 + 1 + 2\operatorname{Re}(i\bar{z})} \le \underbrace{|iz+1|^2}_{= |z|^2 + 1 - 2\operatorname{Re}(i\bar{z})}$$

$$\iff 4\operatorname{Re}(i\bar{z}) = 4\operatorname{Im}(z) \le 0$$

Aufgabe 2

a) **i)** Für jedes $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geqslant 2$ gilt

$$\frac{(\sqrt{k}+1)^2}{k^2+\sqrt{k^4-1}} \geqslant \frac{(\sqrt{k}\,)^2}{k^2+\sqrt{k^4}} = \frac{k}{k^2+k^2} = \frac{1}{2k} \geqslant 0\,.$$

Da die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert, ist auch $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2k}$ divergent. Somit liefert das Minorantenkriterium die Divergenz von $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\sqrt{k}+1)^2}{k^2+\sqrt{k^4-1}}$.

ii) Ist $a_n = \frac{2^n\,n!}{n^n}$ gesetzt, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{2^{n+1}\,(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\,\frac{n^n}{2^n\,n!}\right| = 2\,\frac{(n+1)\,n^n}{(n+1)^{n+1}} = 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &= 2\,\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{e} < 1\,.\end{aligned}$$

Daher liefert das Quotientenkriterium die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

b) Für $x \neq -2$ gilt

$$f(x) = \frac{x+2-2}{x+2} = 1 - \frac{2}{x+2}\,.$$

i) Beweis durch vollständige Induktion:
Induktionsanfang: Nach der Quotientenregel ist f auf $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ differenzierbar und für alle $x \neq -2$ gilt

$$f'(x) = \frac{2}{(x+2)^2} = 2\,\frac{(-1)^{1+1}\,1!}{(x+2)^{1+1}}\,.$$

Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Die Funktion f sei n-mal differenzierbar und es gelte $f^{(n)}(x) = 2\,\frac{(-1)^{n+1}\,n!}{(x+2)^{n+1}}$ für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}$ (IV). Nach der Quotientenregel ist $f^{(n)}$ auf $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ differenzierbar und für jedes $x \neq -2$ ergibt sich

$$f^{(n+1)}(x) \overset{\text{(IV)}}{=} 2\,\frac{d}{dx}\,\frac{(-1)^{n+1}\,n!}{(x+2)^{n+1}} = 2\,\frac{(-1)^{n+1}\,n!\,(-(n+1))}{(x+2)^{(n+1)+1}} = 2\,\frac{(-1)^{(n+1)+1}\,(n+1)!}{(x+2)^{(n+1)+1}}\,.$$

Insbesondere wurde für jedes $n \in \mathbb{N}$ gezeigt, dass f auf $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ n-mal differenzierbar ist, also ist f auf $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ beliebig oft differenzierbar.

ii) Wie in Teil i) gesehen, gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(0) = 2\,\frac{(-1)^{n+1}\,n!}{2^{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}\,n!}{2^n}\,.$$

Ferner ist $f(0) = 0$. Somit lautet die Taylorreihe von f um $x_0 = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\,n!}{2^n\,n!}\,(x-0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,x^n\,,$$

wobei $a_n := \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$ gesetzt ist. Wegen $|\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 \xrightarrow{n\to\infty} 2$ beträgt der Konvergenzradius der obigen Potenzreihe 2.

Aufgabe 3

a) **i)** Betrachte die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{\arctan x} - \cos^2 x$. Nach der Kettenregel ist f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}\, e^{\arctan x} + 2\cos x\, \sin x\,.$$

Aufgrund von $f(0) = 0$ ergibt sich für die Ableitung von f in 0

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\arctan x} - \cos^2 x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = e^{\arctan 0} = 1\,.$$

ii) Mit den Reihenentwicklungen von exp und cos hat man für jedes $x \neq 0$

$$\begin{aligned}\frac{e^{x^3} - 1}{x(1-\cos x)} &= \frac{(1 + x^3 + \frac{1}{2!}(x^3)^2 + \frac{1}{3!}(x^3)^3 + \ldots) - 1}{x(1 - (1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + - \ldots))} = \frac{x^3 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{3!}x^9 + \ldots}{\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4!}x^5 + \frac{1}{6!}x^7 - + \ldots}\\ &= \frac{1 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3!}x^6 + \ldots}{\frac{1}{2} - \frac{1}{4!}x^2 + \frac{1}{6!}x^4 - + \ldots}\end{aligned}$$

und hieraus folgt wegen der Stetigkeit von Potenzreihen

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3} - 1}{x(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3!}x^6 + \ldots}{\frac{1}{2} - \frac{1}{4!}x^2 + \frac{1}{6!}x^4 - + \ldots} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2\,.$$

b) **i)** Die Funktion f ist als Komposition auf $(0,\infty)$ differenzierbarer Funktionen auf $(0,\infty)$ differenzierbar und es gilt für jedes $x > 0$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, \ln x + \sqrt{x}\,\frac{1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,(\ln x + 2)\,.$$

Für $x \geqslant \frac{1}{e}$ erhält man wegen der Monotonie des Logarithmus $\ln x \geqslant \ln \frac{1}{e} = -1$, was auf $\ln x + 2 \geqslant 1 > 0$ für alle $x \geqslant \frac{1}{e}$ führt. Es folgt $f'(x) > 0$ für alle $x \geqslant \frac{1}{e}$. Deshalb ist f auf $[\frac{1}{e}, \infty)$ streng monoton wachsend.
Insbesondere gilt für jedes $x \in [\frac{1}{e}, e^2]$

$$f(x) \geqslant f(\tfrac{1}{e}) = -\tfrac{1}{\sqrt{e}} \qquad \text{und} \qquad f(x) \leqslant f(e^2) = 2e\,. \tag{$*$}$$

Hiermit ist die Inklusion $f([\frac{1}{e}, e^2]) \subset [-\frac{1}{\sqrt{e}}, 2e]$ gezeigt. Sei andererseits $y \in [-\frac{1}{\sqrt{e}}, 2e]$. Wegen $(*)$ gilt dann $f(\frac{1}{e}) \leqslant y \leqslant f(e^2)$. Da f überdies auf $[\frac{1}{e}, e^2]$ stetig ist, gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $x \in [\frac{1}{e}, e^2]$ mit $f(x) = y$. Damit ist auch die andere Inklusion $[-\frac{1}{\sqrt{e}}, 2e] \subset f([\frac{1}{e}, e^2])$ bewiesen. Zusammen ergibt sich $f([\frac{1}{e}, e^2]) = [-\frac{1}{\sqrt{e}}, 2e]$.

Alternative Begründung: Die Funktion $f\colon [\frac{1}{e}, e^2] \to \mathbb{R}$ ist stetig und streng monoton wachsend. Nach einem Resultat der Vorlesung ist dann $f\colon [\frac{1}{e}, e^2] \to [f(\frac{1}{e}), f(e^2)]$ bijektiv, also gilt insbesondere $f([\frac{1}{e}, e^2]) = [f(\frac{1}{e}), f(e^2)] = [-\frac{1}{\sqrt{e}}, 2e]$.

ii) Wegen $f(e) = \sqrt{e}$ ist $f^{-1}(\sqrt{e}) = e$. Wie im Teil i) gesehen, ist $f\colon [\frac{1}{e}, e^2] \to [-\frac{1}{\sqrt{e}}, 2e]$ stetig, bijektiv und in e differenzierbar mit $f'(e) = \frac{3}{2\sqrt{e}} \neq 0$. Nach dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion ist f^{-1} im Punkt $\sqrt{e} = f(e)$ differenzierbar mit

$$(f^{-1})'(\sqrt{e}) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\sqrt{e}))} = \frac{1}{f'(e)} = \frac{2\sqrt{e}}{3}\,.$$

Aufgabe 4

a) $\underline{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{\cos^2 t}\, dt} = I$

Substituiere $t \to x = \cos t$: $I = -\int_1^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x}\Big|_1^{\frac{1}{2}\sqrt{2}}$

$= \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}(2 - \sqrt{2})}$

b) Mit $f(x) = \cos x + \sin x > 0$ auf $[0, \frac{\pi}{4}]$ gilt

$\underline{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\, dx} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \underline{\ln\sqrt{2}}$

c) $\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos(x)}\, dx = I$

$1 + \cos(x) = 1 + \cos(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$

$= 2\cos^2\frac{x}{2}$

$\sqrt{1 + \cos(x)} = \sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right| = -\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$ für $\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}$

$\underline{I} = -\sqrt{2}\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \cos\frac{x}{2}\, dx = -\sqrt{2}\, 2\sin\frac{x}{2}\Big|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}$

$= \underline{\underline{2(\sqrt{2} - 1)}}$