Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski

Herbst 2011
21.09.2011

Bachelor–Modulprüfung

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen und Geodäsie

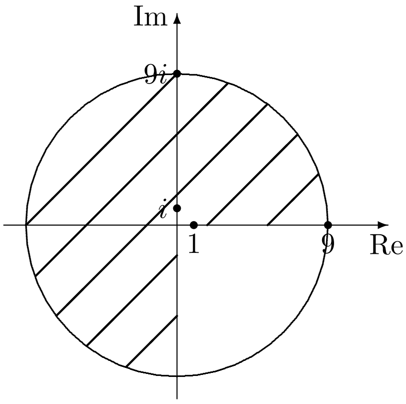
Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

a) Es gilt

$$
\begin{aligned}
&\left\{z^2 \mid z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ mit } |z| < 3 \text{ und } \arg(z) \in (0, \tfrac{3}{4}\pi)\right\} \\
&= \left\{z^2 \mid z = re^{i\phi} \text{ für ein } r \in (0,3) \text{ und } \phi \in (0, \tfrac{3}{4}\pi)\right\} \\
&= \left\{r^2 e^{2i\phi} \mid r \in (0,3) \text{ und } \phi \in (0, \tfrac{3}{4}\pi)\right\} \\
&= \left\{\rho e^{i\theta} \mid \rho \in (0,9) \text{ und } \theta \in (0, \tfrac{3}{2}\pi)\right\} \\
&= \left\{w \in \mathbb{C} \mid |w| \in (0,9) \text{ und } (\operatorname{Re} w < 0 \text{ oder } \operatorname{Im} w > 0)\right\}.
\end{aligned}
$$

Also ist die gesuchte Menge die offene Kreisscheibe um den Ursprung mit Radius 9 ohne den vierten Quadranten, ohne die positive reelle Achse, ohne die negative imaginäre Achse und ohne den Ursprung. Skizze:



b) Für $z = 0$ ist die Gleichung erfüllt. Für $z \neq 0$ gilt

$$
\begin{aligned}
\big(z\,|z|\big)^2 = 8i\,\overline{z} \quad &\Longleftrightarrow \quad z^2 z\overline{z} = 8i\,\overline{z} \quad \Longleftrightarrow \quad z^3 = 8i \\
&\Longleftrightarrow \quad z = 2e^{i\frac{1}{6}\pi} \;\text{ oder }\; z = 2e^{i\frac{5}{6}\pi} \;\text{ oder }\; z = 2e^{i\frac{3}{2}\pi} = -2i \\
&\Longleftrightarrow \quad |z| = 2 \text{ und } \arg(z) \in \{\tfrac{1}{6}\pi, \tfrac{5}{6}\pi, \tfrac{3}{2}\pi\}.
\end{aligned}
$$

c) *1. Möglichkeit:* vollständige Induktion.

IA ($n = 1$): Es ist $\frac{1}{1^2} = 1 \leqslant 2 - 1$.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Es gelte $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}$ (IV). Dann folgt

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \overset{\text{(IV)}}{\leqslant} 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \\
&= 2 + \frac{n-(n+1)^2}{n(n+1)^2} = 2 - \underbrace{\frac{n^2+n+1}{n^2+n}}_{\geqslant 1} \frac{1}{n+1} \leqslant 2 - \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}
$$

2. Möglichkeit: Im Fall $n = 1$ ist die Aussage wegen $\frac{1}{1^2} = 1 \leqslant 2 - 1$ wahr. Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$ lässt sich die Summe nach oben durch eine Teleskopsumme abschätzen:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 + \frac{1}{2-1} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}\,.$$

Aufgabe 2

a) Setze $a_k := (\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k})\frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \frac{\frac{3^k+2^k}{2^k\,3^k}\ \frac{1}{k}}{\frac{3^{k+1}+2^{k+1}}{2^{k+1}\,3^{k+1}}\ \frac{1}{k+1}} = 6\,\frac{3^k + 2^k}{3^{k+1} + 2^{k+1}}\ \frac{k+1}{k} \xrightarrow{k\to\infty} 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = 2\,,$$

denn

$$\frac{3^k + 2^k}{3^{k+1} + 2^{k+1}} = \frac{1 + (2/3)^k}{3 + 2\cdot(2/3)^k} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1+0}{3+2\cdot 0} = \frac{1}{3}$$

und

$$\frac{k+1}{k} = \frac{1 + 1/k}{1} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1+0}{1} = 1\,.$$

Wegen $\lim_{k\to\infty} |\frac{a_k}{a_{k+1}}| = 2$ ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ gleich 2. Demzufolge konvergiert die Reihe absolut für $|x| < 2$ und divergiert für $|x| > 2$.

Für $x = 2$ ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k 2^k$ divergent, weil diese Reihe wegen $a_k 2^k = (1 + (\frac{2}{3})^k)\frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{k} > 0$, $k \in \mathbb{N}$, die divergente Minorante $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ hat.

Im Fall $x = -2$ schreibe $a_k(-2)^k = (-1)^k c_k$ mit $c_k := (1 + (\frac{2}{3})^k)\frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine nichtnegative Nullfolge, die wegen $c_{k+1} = (1 + (\frac{2}{3})^{k+1})\frac{1}{k+1} \leqslant (1 + (\frac{2}{3})^k)\frac{1}{k} = c_k$, $k \in \mathbb{N}$, monoton fallend ist. Damit sind die Voraussetzungen des Leibnizkriteriums erfüllt, welches die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k c_k$ garantiert.

Fazit: Die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ konvergiert genau für $x \in [-2, 2)$.

b) Mit Hilfe der geometrischen Reihe erhält man für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|\frac{5}{11}(z-2)| < 1$

$$\frac{1}{1+5z} = \frac{1}{11 + 5(z-2)} = \frac{1}{11}\,\frac{1}{1 + \frac{5}{11}(z-2)} = \frac{1}{11}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{5}{11}(z-2)\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 5^k}{11^{k+1}}(z-2)^k\,.$$

Da diese Potenzreihe für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-2| < \frac{11}{5}$ konvergiert und für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-2| > \frac{11}{5}$ divergiert, beträgt ihr Konvergenzradius $\frac{11}{5}$. Außerdem ist $f^{(9)}(2) = \frac{-5^9}{11^{10}}\,9!$.

Aufgabe 3

a) **i)** Es gilt

$$x^{3/2}\left(\sqrt{2x^3+1} - \sqrt{2x^3-1}\right) = x^{3/2}\,\frac{(2x^3+1) - (2x^3-1)}{\sqrt{2x^3+1} + \sqrt{2x^3-1}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2+1/x^3} + \sqrt{2-1/x^3}} \xrightarrow{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{2+0} + \sqrt{2-0}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

ii) Wegen

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(e^{3x}-5x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^{3x}-5x)-\ln(e^{3\cdot 0}-5\cdot 0)}{x-0}=\frac{d}{dx}\ln(e^{3x}-5x)\Big|_{x=0}$$
$$=\frac{1}{e^{3x}-5x}(3e^{3x}-5)\Big|_{x=0}=-2$$

und der Stetigkeit der Exponentialfunktion ist

$$\lim_{x\to 0}\left(e^{3x}-5x\right)^{1/x}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln(e^{3x}-5x)}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(e^{3x}-5x)}=e^{-2}\,.$$

b) i) Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist f auf $(0,\infty)$ differenzierbar mit

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)(2+x^2)}}\,,\qquad x\in(0,\infty).$$

ii) Wegen $f'(x)>0$ für alle $x\in(0,\infty)$ ist f auf $(0,\infty)$ streng monoton wachsend.

iii) Wegen $\arctan(0)=0$ gilt für jedes $x\in(0,\infty)$

$$\arctan(x)=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\,dt$$

und somit

$$f(x)-\arctan(x)=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(2+t^2)}}-\frac{1}{1+t^2}\,dt$$
$$\leqslant\int_0^x\underbrace{\frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(1+t^2)}}-\frac{1}{1+t^2}}_{=0}\,dt=0\,.$$

Demzufolge ist $f(x)\leqslant\arctan(x)$ für jedes $x\in(0,\infty)$.

Aufgabe 4

a) i) Für jedes $x\in[-1,1]$ gilt

$$\max\{3^{-x},3^x\}=\begin{cases}3^{-x} & \text{für } x<0,\\ 3^x & \text{für } x\geqslant 0.\end{cases}$$

Somit folgt mit der Substitution $y=-x$, $dx=-dy$

$$\int_{-1}^1\max\{3^{-x},3^x\}\,dx=\int_{-1}^0 3^{-x}\,dx+\int_0^1 3^x\,dx=\int_0^1 3^y\,dy+\int_0^1 3^x\,dx$$
$$=2\int_0^1 3^x\,dx=2\Big[\frac{3^x}{\ln 3}\Big]_0^1=\frac{4}{\ln 3}\,.$$

ii) Die Substitution $y=\sqrt[3]{x}$, $dx=3y^2dy$ führt auf

$$\int_1^8\frac{1}{x+\sqrt[3]{x}}\,dx=\int_1^2\frac{3y^2}{y^3+y}\,dy=\frac{3}{2}\int_1^2\frac{2y}{y^2+1}\,dy=\frac{3}{2}\left[\ln(y^2+1)\right]_1^2=\frac{3}{2}\left(\ln 5-\ln 2\right).$$

iii) Mit zweimaliger partieller Integration ergibt sich

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2}e^x\cos(x)\,dx=\left[e^x\cos(x)\right]_{\pi/4}^{\pi/2}+\int_{\pi/4}^{\pi/2}e^x\sin(x)\,dx$$
$$=\left[e^x\cos(x)+e^x\sin(x)\right]_{\pi/4}^{\pi/2}-\int_{\pi/4}^{\pi/2}e^x\cos(x)\,dx$$

und somit

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2}e^x\cos(x)\,dx=\frac{1}{2}\left[e^x\cos(x)+e^x\sin(x)\right]_{\pi/4}^{\pi/2}=\frac{1}{2}\left(e^{\pi/2}-\tfrac{2}{\sqrt{2}}\,e^{\pi/4}\right).$$

b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned}\int_a^b x f''(x)\,dx &= \big[x f'(x)\big]_a^b - \int_a^b f'(x)\,dx = b f'(b) - a f'(a) - \big[f(x)\big]_a^b \\ &= b f'(b) - a f'(a) - f(b) + f(a)\,.\end{aligned}$$

Somit leisten $A = -f'(a)$ und $B = f'(b)$ das Gewünschte.