Karlsruher Institut für Technologie (KIT) Herbst 2012
Institut für Analysis 19.09.2012
Prof. Dr. Dirk Hundertmark

Bachelor–Modulprüfung

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Aufgabe 1 $\quad$ (5 + 5 = 10 Punkte)

a) Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil von

$$\frac{2i-10}{3i-2}$$

sowie die Polardarstellung aller komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$, die

$$z^3 = \frac{2i-10}{3i-2}$$

erfüllen.

b) Berechnen Sie Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x > 1 \\ a + bx^2 & \text{für } x \leqslant 1 \end{cases}$$

auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist.

Aufgabe 2 $\quad$ ((4 + 1 + 3) + 2 = 10 Punkte)

a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_0 := 0 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} := \frac{(n+1)^2 + a_n}{(n+1)^2 + 1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0\,.$$

i) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\frac{n^2}{n^2+1} \leqslant a_n < 1\,.$$

ii) Untersuchen Sie, ob $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent ist, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$.

iii) Bestimmen Sie die Menge aller $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a)$$

konvergent ist.

b) Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{n^2}$$

auf Konvergenz.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 $\quad$ **((2 + 2 + 3) + 3 = 10 Punkte)**

a) Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto \frac{1}{e^x + 1}\,.$$

i) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}$ injektiv ist.

ii) Bestimmen Sie $f(\mathbb{R})$.

iii) Weisen Sie nach, dass

$$f'(x) = (f(x))^2 - f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, und ermitteln Sie die Ableitung der Umkehrfunktion von f in allen Punkten, in denen dies möglich ist.

b) Entwickeln Sie

$$\frac{1}{y^2 - y}$$

in eine Potenzreihe um $y_0 = \frac{1}{2}$ und geben Sie deren Konvergenzradius an.

Aufgabe 4 $\quad$ **((2 + 3) + 3 + 2 = 10 Punkte)**

a) Berechnen Sie den Wert der folgenden Integrale:

i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1+x)^2}{1+x^2}\,dx\,;$

ii) $\displaystyle\int_1^a x a^x\,dx\,, \qquad \text{wobei } a > 1\,.$

b) Berechnen Sie eine Stammfunktion von

$$f\colon (1,\infty) \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,.$$

c) Untersuchen Sie, ob die Gleichung

$$\int_a^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan\left(\tfrac{1}{a}\right) - \arctan\left(\tfrac{1}{b}\right)$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$ gültig ist, und beweisen Sie diese gegebenenfalls.

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:
Die Klausurergebnisse hängen ab Dienstag, den 09.10.2012, am Schwarzen Brett neben Zimmer 3A-17 (Allianz-Gebäude 05.20) aus und liegen unter

`www.math.kit.edu/iana1`

im Internet. Die **Klausureinsicht** findet am Donnerstag, den 18.10.2012, von 16:00 bis 18:00 Uhr im Tulla-Hörsaal (Geb. 11.40) statt. Die mündlichen Nachprüfungen sind in der Woche vom 22.10.2012 bis 26.10.2012 im Allianz-Gebäude 05.20.