Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Dirk Hundertmark

Herbst 2012
19.09.2012

Bachelor–Modulprüfung

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

a) Für $w := \frac{2i-10}{3i-2}$ gilt

$$w = \frac{2i-10}{3i-2} \cdot \frac{-3i-2}{-3i-2} = \frac{6+30i-4i+20}{9+4} = \frac{26+26i}{13} = 2+2i\,.$$

Also ist $\operatorname{Re} w = \operatorname{Im} w = 2$. Außerdem gilt $w = \sqrt{8}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Für $z = 0$ gilt $z^3 = 0$, so dass die Gleichung $z^3 = \frac{2i-10}{3i-2}$ nicht erfüllt ist.

Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt es $r > 0$ und $\varphi \in (-\pi, \pi]$ mit $z = re^{i\varphi}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
z^3 = w \quad &\Longleftrightarrow \quad r^3 e^{3i\varphi} = \sqrt{8}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \\
&\Longleftrightarrow \quad r^3 = \sqrt{8} \quad \text{und} \quad 3\varphi = \tfrac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \\
&\overset{\varphi\in(-\pi,\pi]}{\Longleftrightarrow} \quad r = \sqrt{2} \quad \text{und} \quad \varphi = \tfrac{\pi}{12} + \tfrac{2}{3}k\pi \text{ für } k \in \{-1,0,1\} \\
&\Longleftrightarrow \quad r = \sqrt{2} \quad \text{und} \quad \varphi \in \{\tfrac{-7}{12}, \tfrac{1}{12}, \tfrac{3}{4}\}\,.
\end{aligned}$$

Demnach gilt $z^3 = \frac{2i-10}{3i-2}$ genau für $z \in \left\{\sqrt{2}e^{-\frac{7i}{12}}, \sqrt{2}e^{\frac{i}{12}}, \sqrt{2}e^{\frac{3i}{4}}\right\}$.

b) Offenbar ist f auf $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ differenzierbar und damit auch stetig. Somit genügt es, die Funktion f an der Stelle 1 zu untersuchen.

Stetigkeit: Wegen

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = a + b = f(1) \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 1+} f(x) = 1$$

ist f in 1 stetig, falls $a + b = 1$ $(*)$ gilt.

Differenzierbarkeit: Es gilt

$$\lim_{x\to 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1-} \frac{a+bx^2-(a+b)}{x-1} = \lim_{x\to 1-} \frac{b(x^2-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1-} b(x+1) = 2b$$

und

$$\lim_{x\to 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1+} \frac{\frac{1}{x}-(a+b)}{x-1} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to 1+} \frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1+} \frac{1-x}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1+} \frac{-1}{x} = -1\,.$$

Folglich ist f an der Stelle 1 differenzierbar genau dann, wenn $2b = -1$, d.h. $b = -1/2$, gilt. Wegen $(*)$ ergibt sich dann $a = 3/2$.

Fazit: Nur für $a = 3/2$ und $b = -1/2$ ist die Funktion f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar.

Aufgabe 2

a) **i)** Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: Wegen $a_0 = 0$ ist $\frac{n^2}{n^2+1}\big|_{n=0} = 0 \leqslant a_0 < 1$ erfüllt.

Induktionsschluss: Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Es gelte $\frac{n^2}{n^2+1} \leqslant a_n < 1$ (IV). Dann folgt mit der Rekursionsformel wegen $(n+1)^2 + 1 > 0$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^2 + a_n}{(n+1)^2+1} \overset{\text{(IV)}}{<} \frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^2+1} = 1$$

sowie

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^2 + a_n}{(n+1)^2+1} \overset{\text{(IV)}}{\geqslant} \frac{(n+1)^2 + \frac{n^2}{n^2+1}}{(n+1)^2+1} \geqslant \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1}\,.$$

ii) Es gilt $\frac{n^2}{n^2+1} = \frac{1}{1+1/n^2} \to \frac{1}{1+0} = 1$ für $n \to \infty$. Nach i) ist daher die reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zwischen zwei Folgen eingeschlossen, die beide gegen 1 konvergieren. Somit konvergiert auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nach dem Sandwichkriterium gegen 1.

iii) Im Fall $a \neq 1$ gilt $\lim_{n\to\infty}(a_n - a) = 1 - a \neq 0$, so dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a)$ divergiert.

Nun sei $a = 1$. Nach i) gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

$$\underbrace{\frac{n^2}{n^2+1} - 1}_{=-\frac{1}{n^2+1}} \leqslant a_n - 1 < 0\,, \qquad \text{also} \qquad 0 < 1 - a_n \leqslant \frac{1}{n^2+1}\,.$$

Hieraus folgt $|a_n - 1| \leqslant \frac{1}{n^2+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Da die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ konvergiert (vgl. Vorlesung), ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - 1)$ nach dem Majorantenkriterium konvergent.

Fazit: Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a)$ konvergiert nur für $a = 1$.

b) Wegen

$$\sqrt[n]{\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2}\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{n^2}} = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n}\left(1 + \frac{1/2}{n}\right)^{n} \xrightarrow{n\to\infty} e^{-2}e^{1/2} = e^{-3/2} < 1$$

konvergiert die zu untersuchende Reihe nach dem Wurzelkriterium.

Aufgabe 3

a) **i)** Nach der Kettenregel ist die Funktion f differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = -\frac{e^x}{(e^x+1)^2}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Wegen $f'(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist f streng monoton fallend und somit injektiv.

ii) Es gilt $f(\mathbb{R}) = (0,1)$, denn

$\subset$: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $e^x > 0$ und somit $0 < \frac{1}{e^x+1} < \frac{1}{0+1} = 1$, also $f(x) \in (0,1)$.

$\supset$: Sei $y \in (0,1)$. Dann ist $\frac{1-y}{y} > 0$ und für $x := \ln \frac{1-y}{y}$ gilt

$$f(x) = \frac{1}{\frac{1-y}{y}+1} = \frac{y}{1-y+y} = y\,, \qquad \text{also } y \in f(\mathbb{R})\,.$$

iii) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(x) \overset{\text{i)}}{=} -\frac{e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{1-(1+e^x)}{(e^x+1)^2} = \frac{1}{(e^x+1)^2} - \frac{1}{e^x+1} = (f(x))^2 - f(x)\,. \qquad (*)$$

Da $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt (siehe i)-Teil), liefert der Satz über die Umkehrfunktion, dass $f^{-1}\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist mit

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \overset{(*)}{=} \frac{1}{(f(f^{-1}(y)))^2 - f(f^{-1}(y))} = \frac{1}{y^2-y}\,, \qquad y \in (0,1)\,.$$

b) Für jedes $y \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ gilt

$$\frac{1}{y^2-y} = \frac{1}{(y-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} = \frac{-4}{1-(2y-1)^2}\,.$$

Für jedes $y \in \mathbb{R}$ mit $|2y-1| < 1$, d.h. $y \in (0,1)$, ergibt sich (geometrische Reihe)

$$= -4\sum_{k=0}^{\infty}\big((2y-1)^2\big)^k = -4\sum_{k=0}^{\infty}\big(4(y-\tfrac{1}{2})^2\big)^k = -\sum_{k=0}^{\infty} 4^{k+1}(y-\tfrac{1}{2})^{2k}\,.$$

Da diese Reihe für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $|y-1/2| < 1/2$ konvergiert und für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $|y-1/2| > 1/2$ divergiert (geometrische Reihe), beträgt ihr Konvergenzradius $1/2$.

Aufgabe 4

a) **i)** Es gilt

$$\int_0^1 \frac{(1+x)^2}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1+x^2+2x}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 1 + \frac{\frac{d}{dx}(1+x^2)}{1+x^2}\,dx$$
$$= \left[x + \ln|1+x^2|\right]_0^1 = 1 + \ln 2\,.$$

ii) Sei $a > 1$. Mit partieller Integration ergibt sich

$$\int_1^a x a^x\,dx = \left[x\frac{a^x}{\ln a}\right]_1^a - \int_1^a \frac{a^x}{\ln a}\,dx = \left[x\frac{a^x}{\ln a} - \frac{a^x}{(\ln a)^2}\right]_1^a = \frac{a^{a+1}-a}{\ln a} + \frac{a-a^a}{(\ln a)^2}\,.$$

b) Die Substitution $t = \sqrt{x^2-1}$, $dt = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$ führt wegen $\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{dt}{x}$ und $x^2 = t^2+1$ auf

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int \frac{1}{t^2+1}\,dt\,\Big|_{t=\sqrt{x^2-1}} = \arctan t\,\big|_{t=\sqrt{x^2-1}} = \arctan\big(\sqrt{x^2-1}\big)\,, \qquad x>1\,.$$

Somit ist $(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $x\mapsto \arctan\big(\sqrt{x^2-1}\big)$ eine Stammfunktion von f.

c) Seien $0<a<b$. Mit der Substitution $y=\frac{1}{x}$, $dy = -\frac{1}{x^2}\,dx = -y^2\,dx$ ergibt sich

$$\int_a^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = -\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} \frac{1}{1+\frac{1}{y^2}}\frac{1}{y^2}\,dy = \int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} \frac{1}{y^2+1}\,dy = \left[\arctan y\right]_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} = \arctan\big(\tfrac{1}{a}\big) - \arctan\big(\tfrac{1}{b}\big)\,.$$

Damit ist die zu untersuchende Gleichung für alle $a,b\in\mathbb{R}$ mit $0<a<b$ gültig.