Herbst 2013 HM I 31.7.2013 Lösungen

Aufgabe 1 a)

Nach Vorlesung gilt $1+2+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$, $n=1,2,\ldots$

Somit gilt $n! = 2\cdot 3\cdot 4\cdots n \le 2^{\frac{n(n-1)}{2}} = 2\cdot 2^2\cdot 2^3\cdots 2^{n-1}$

falls $k \le 2^{k-1}$, $k=2,3,\ldots$ gilt.

Wir beweisen $k \le 2^{k-1}$, $k=1,2,\ldots$ mit vollst. Induktion

Ind. Anfang: $k = 1 = 2^{1-1}$ ✓

Ind. schluss: $k \to k+1$ (IV) Ind. vor: $k \le 2^{k-1}$ für ein $k \ge 1$.

Ind. beh: $k+1 \le 2^k$

Ind. bew: $k+1 \underset{(IV)}{\le} 2^{k-1}+1 \le 2^{k-1}+2^{k-1} = 2^k$ ✓

b) (geometr. Reihe)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{(i-1)^k} = \frac{1}{i-1}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{(i-1)^{k-1}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(i-1)^k}\right)\frac{1}{i-1}$$

konvergent, da $|i-1| = \sqrt{2} > 1$

$$\overset{!}{=} \frac{1}{i-1}\;\frac{1}{1+\frac{1}{i-1}} = -i$$

$$z^3 = -i = e^{i\frac{3\pi}{2}} \Rightarrow z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i,\; z_2 = ie^{i\frac{2\pi}{3}},\; z_3 = ie^{i\frac{4\pi}{3}}$$

Aufgabe 2:

(a) Quotientenkriterium:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2+2n}{(n+1)^2+2(n+1)} = \frac{n^2+2n}{n^2+4n+3}$$

$$= \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

$\leadsto$ Konvergenzradius $= 1$ $\leadsto$ konvergiert für x mit $|x|<1$ und divergiert für x mit $|x|>1$.

$x = \pm 1$: Wir haben $\left|\frac{1}{n^2+2n} x^n\right| = \frac{1}{n^2+2n}$ und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n} \leq \sum_{n=1} \frac{1}{n^2} < \infty$$

$\Rightarrow$ Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n} x^n$ ist absolut konvergent für $x = \pm 1$.

$\Rightarrow$ Reihe konvergiert genau für $x \in \overline{B_1(0)}$.

(b) Es gilt $\frac{1}{n^2+2n} = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$

und damit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n} x^n = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2} x^n\right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n - \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2} \right)$$

(Probleme mit $x = 0$)

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n - \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{x} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\ln(1-x) - \frac{1}{x^2} \ln(1-x) + \frac{1}{2} - \frac{1}{x} \right)$$

Herbst 2013 HMI 31.7.2013 Lösungen

Aufgabe 3 a) (Zwischenwertsatz / Monotonie)

Da $f: f(x) = \ln(x) + x$, $x > 0$ stetig ist, und wegen $f(\frac{1}{2}) = \ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = -\ln 2 + \frac{1}{2} < 0$

denn: $f(\frac{1}{2}) < 0 \iff \frac{1}{2} < \ln 2 \iff \sqrt{e} < 2 \iff e < 4$ ✓

und wegen $f(1) = 1 > 0$

hat f im Intervall $(\frac{1}{2}, 1)$ eine Nullstelle.

Wegen $f'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$ für $x > 0$ ist f für $x > 0$ streng monoton wachsend, also besitzt f im Intervall $(\frac{1}{2}, 1)$ der Länge $l = \frac{1}{2}$ genau eine Nullstelle.

b)
$$\int_{n-1}^{n+1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Substitution}\\ x \to t = x^2}}{=} \frac{1}{2}\int_{(n-1)^2}^{(n+1)^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t}} = \sqrt{1+t}\,\Big|_{(n-1)^2}^{(n+1)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{n-1}^{n+1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+(n+1)^2} - \sqrt{1+(n-1)^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{(n+1)^2}{n^2}} + \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{(n-1)^2}{n^2}}} = 2$$

oder argumentiere so: (MWSIR)

$$\int_{n-1}^{n+1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = 2\,\frac{\xi_n}{\sqrt{1+\xi_n^2}} \quad \text{mit} \quad n-1 < \xi_n < n+1$$

Da mit $n \to \infty$ auch $\xi_n \to \infty$ gilt, folgt sofort

$$\lim_{n\to\infty} \int_{n-1}^{n+1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = 2$$

Aufgabe 4 a)

$$\int^x \frac{dt}{\sqrt{e^t-1}} \underset{\downarrow}{=} 2\int^{\sqrt{e^x-1}} \frac{dy}{1+y^2} = 2\arctan\sqrt{e^x-1}$$

Substitution $t \to y = \sqrt{e^t-1}$

Alle Stammfunktionen von $\frac{1}{\sqrt{e^x-1}}$ sind durch $2\arctan\sqrt{e^x-1} + c$ mit einer beliebigen Konstanten c gegeben.

b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{f(2+\frac{1}{n})-f(2)}{\frac{1}{n}} = f'(2) = -4,$$ da f für alle x diff'bar ist.

c) $$\int_1^x \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} = \int_{\tau=0}^{\sqrt{x^2-1}} \frac{d\tau}{1+\tau^2}$$ mit der vorgeschlagenen Substitution

$$= \arctan\sqrt{x^2-1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \arctan\sqrt{x^2-1} = \frac{\pi}{2}$$