Karlsruhe Institut für Technologie (KIT) Herbst 2014
Institut für Analysis 28.07.2014
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann

Modulprüfung / Bachelor

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

a) Induktionsanfang (IA): Für $n = 0$ stimmt die Behauptung, denn beide Seiten der Gleichung ergeben dann $\frac{1}{s}$:

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-xs}\,dx = \frac{1}{s} = \frac{3^0\cdot 0!}{s}.$$

Induktionsschluss (IS): Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b (3x)^n e^{-xs}\,dx = \frac{3^n\cdot n!}{s^{n+1}}$$

(Induktionsvoraussetzung, kurz: IV). Dann folgt

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b (3x)^{(n+1)}e^{-xs}\,dx = \lim_{b\to\infty}\Big[-s^{-1}(3x)^{n+1}e^{-xs}\Big]_0^b + \lim_{b\to\infty} s^{-1}\int_0^b (n+1)3(3x)^n e^{-xs}\,dx =$$

$$0 + 3(n+1)\frac{3^n\cdot n!}{s\cdot s^{n+1}} = \frac{3^{n+1}(n+1)!}{s^{n+2}}\ .$$

b) Wegen

$$\frac{2+2i}{1-i} - i = \frac{2+2i-i+i^2}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{\frac{\pi}{2}}$$

gilt $z^4 = e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Die Lösungen der Gleichung sind

1) $z_1 = e^{i(\frac{\pi}{8}+2\pi k)}$ **2)** $z_2 = e^{i(\frac{5\pi}{8}+2\pi k)}$ **3)** $z_3 = e^{i(\frac{9\pi}{8}+2\pi k)}$
4) $z_4 = e^{i(\frac{13\pi}{8}+2\pi k)}$

mit $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

c) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7n^5+n+1}{2n^2\log n - 5n^5 + 18n + 10} = \lim_{n\to\infty}\frac{7+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^5}}{2\frac{\log n}{n^3} - 5 + 18\frac{1}{n^4} + 10\frac{1}{n^5}} = -\frac{7}{5}\,.$$

Aufgabe 2

a) Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+50}\ .$$

ist eine alternierende Reihe mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Nach Leibnitz-Kriterium konvergiert diese Reihe, wenn die Folge $|a_n|$ eine monoton fallende Folge ist. Um die Monotonie der Folge $|a_n|$

zu Zeigen betrachten wir die Funktion $f : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x+50}$. Für die Ableitung von f gilt

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + 25x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}}{(x+50)^2} = \frac{25x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}}{(x+50)^2} < 0$$

für $x > 50$. Daraus folgt, dass die Folge $|a_n|$ für $n > 50$ eine monoton fallende Folge ist, was die Konvergenz der Reihe implizit.
Nach Minoranten-Kriterium ist die Reihe nicht absolutkonvergent, weil für $n > 50$

$$\frac{n^{\frac{1}{2}}}{n+50} > \frac{1}{2}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

gilt und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}}$ divergent ist.

b) Es gilt

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{5^{n-2}(n-4)^2}{5^{n-1}(n-5)^2}\right| = \frac{1}{5}\,.$$

Der Konvergenzradius ist $\frac{1}{5}$.
Wir untersuchen nun die Konvergenz der Reihe in den Punkten $x = \frac{1}{5}$ und $x = -\frac{1}{5}$.
Offensichtlich gilt für $|x| = \frac{1}{5}$

$$|a_n x^n| = \left|\frac{5^{n-2}}{5^n(n-5)^2}\right| = \frac{1}{25}\cdot\frac{1}{k^2}$$

mit $k = n - 5$. Nach Majoranten-Kriterium konvergiert die Reihe in beiden Punkten, also konvergiert die Reihe für $x \in [-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}]$.

Aufgabe 3

a) **i)** Es gilt nach der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(1+\sin^2(3x)\right)}{x\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin 3x\cos 3x\cdot 3}{(1+\sin^2 3x)(\sin 2x + 2x\cos 2x)} = \lim_{x\to 0}\frac{6\sin 3x}{\sin 2x + 2x} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{18\cos 3x}{2\cos 2x + 2} = \frac{18}{4} = 4\frac{1}{2}\,.$$

ii) Es gilt

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{4\sin^2 x\cdot\cos^2 x - 1}{\tan^{\frac{1}{2}} x - 1} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{8(\sin x\cos^3 x - \cos x\sin^3 x)}{\frac{1}{2}\tan^{-\frac{1}{2}} x\cdot\cos^{-2} x} = 0\,.$$

b) Die Funktion f ist auf dem offenen Intervall $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{-8\sin x\cos x}{\sqrt{5-4\sin^2 x}}\,.$$

Die Ableitung der Funktion f hat auf $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ nur eine Nullstelle im Punkt $x = 0$. Wir berechnen die Werte von f an den Stellen $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ und bekommen, dass $f_{\min} = f(-\frac{\pi}{4}) = f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{3}$ und $f_{\max} = f(0) = \sqrt{5}$.

c) Die Funktion f ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $f'(x) = 1+\cos x > 0$ für $x \neq \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ und $f'(x) = 0$ für $x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Offensichtlich ist f eine streng monoton wachsende Funktion auf den offenen Intervallen $(\pi + 2k\pi, \pi + 2(k+1)\pi)$ und damit, wegen der Stetigkeit von f wächst f streng monoton auf $\mathbb{R}$. Daraus folgt, dass f bijektiv ist.

Aufgabe 4

a) **i)** Es gilt

$$\int_0^\pi x\sin^2(3x)\,dx = \int_0^\pi \frac{x(1-\cos(6x))}{2}\,dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^\pi - \frac{1}{2}\int_0^\pi x\cos(6x)\,dx = \frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{12}\Big[x\sin 6x\Big]_0^\pi$$
$$+\frac{1}{12}\int_0^\pi \sin 6x\,dx = \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{36}\Big[-\cos 6x\Big]_0^\pi = \frac{\pi^2}{4}$$

ii) Mit Hilfe der Substitution $y = x^2+1$, $dy = 2x\,dx$ ergibt sich

$$\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \frac{1}{2}\int_4^9 \frac{1}{y^{\frac{3}{2}}}\,dy = -\Big[y^{-\frac{1}{2}}\Big]_4^9 = \frac{1}{6}\,.$$

b) Mittels Zeilenumformungen bringt man $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ auf Zeilennormalform (die Zeilen werden dabei jeweils mit Z_1, Z_2 und Z_3 bezeichnet):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & 2 \\ 8 & 7 & 5 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2\to Z_2-2Z_1]{Z_3\to Z_3-4Z_1} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -13 & -3 & -4 \\ 0 & -13 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[Z_3\to Z_3-Z_2]{Z_2\to -\frac{1}{13}Z_2} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{3}{13} & \frac{4}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{Z_1\to \frac{1}{2}(Z_1-5Z_2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{26} & \frac{19}{26} \\ 0 & 1 & \frac{3}{13} & \frac{4}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Man kann nun den (-1)-Ergänzungstrick verwenden, um eine Basis von Kern A abzulesen:

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{11}{26} \\ \frac{3}{13} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{19}{26} \\ \frac{4}{13} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aus der Dimensionsformel $\dim \operatorname{Bild} A + \dim \operatorname{Kern} A = 4$ folgt,dass $\dim \operatorname{Bild} A = 2$ gilt. Da die zwei Vektoren

$$Ae_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix},\ Ae_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind und beide in Bild A liegen, ist $\{Ae_1, Ae_2\}$ eine Basis von Bild A.