Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos

Herbst 2015
23.07.2015

Modulprüfung / Bachelor

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

a) Es gilt $z^6 + 2z^3 + 1 = (z^3 + 1)^2$. Deshalb ist die Gleichung äquivalent zu der Gleichung

$$z^3 = -1 = e^{i(\pi + 2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Die Lösungen der Gleichung sind

$$z_1 = e^{i(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi)} \;, z_2 = e^{i(\frac{\pi}{3} + 2k\pi)} \;, z_3 = e^{i(\pi + 2k\pi)} \;\; k \in \mathbb{Z}.$$

b) **(i)** Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}\,.$$

(ii) Nach der Regel von de l'Hospital gilt

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x\ln x + x - 1} =$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{\ln x + 1 + 1} = \frac{1}{2}$$

.

c) Die Reihe ist nicht konvergent, weil

$$a_n = (-1)^n \Big(1 - \frac{1}{2}\cos\frac{1}{n}\Big)\,.$$

keine Nullfolge ist.

Aufgabe 2

a) (i) Es gilt $f(0) = 0$ und $f'(x) = \cos(\sin x)\cos x$. Also $f'(0) = 1$. Da $T_1(f,0)(x) = f(0) + f'(0)x$ bekommen wir $T_1(f,0)(x) = x$. Daraus folgt,dass

$$T_1(f,0)(0.2) = 0.2.$$

(ii) Für $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ gilt nach dem Taylorsatz

$$|\sin(\sin x) - T_1(f,0)| \leqslant \frac{1}{2} \sup_{\xi\in[0;\frac{\pi}{2}]} f''(\xi)x^2 = \frac{1}{2} \sup_{\xi\in[0;\frac{\pi}{2}]} |(-\sin(\sin\xi)\cos^2\xi - \cos(\sin\xi)\sin\xi)x^2| \leqslant$$

$$\frac{1}{2} 2x^2 = x^2\,.$$

b) (i) Es gilt $R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} c_n}$, wobei $c_n = \sqrt[n]{\left(\frac{5+(-1)^n}{3}\right)^n} = \frac{5+(-1)^n}{3}$. Offensichtlich gilt $c_{2n} \to 2$, und $c_{2n+1} \to \frac{4}{3}$. Der größte Häufungswert der Folge ist 2. Daraus folgt, dass $\limsup c_n = 2$ und deshalb $R = \frac{1}{2}$.

(ii) Da $R = \frac{1}{2}$ konvergiert die Reihe, wenn $|x-1| < \frac{1}{2}$ und divergiert sie wenn $|x-1| > \frac{1}{2}$. Wir betrachten jetzt die Randpunkte. Wir fangen mit dem Fall $x = \frac{1}{2}$ an. Der n-te Term der Potenzreihe ist dann $d_n := \left(\frac{5+(-1)^n}{3}\right)^n (-\frac{1}{2})^n$. Da für die Teilfolge d_{2n} gilt $d_{2n} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, bekommen wir, dass d_n keine Nullfolge ist, und deshalb ist die Potenzreihe divergent. Ähnlich folgt, dass die Potenzreihe divergent ist, wenn $x-1 = \frac{1}{2}$. Aus diesem Grund konvergiert die Potenzreihe, genau dann wenn $|x-1| < \frac{1}{2} \iff x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

Aufgabe 3

a) Es gilt $f'(x) = 1 - \frac{1}{2x^2} = 0 \iff 2x^2 - 1 = 0 \iff x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Offensichtlich $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ist ein Kandidat für das Minimum oder Maximum, dagegen $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ kein Kandidat für das Minimum oder Maximum ist, weil $-\frac{\sqrt{2}}{2} \notin [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ gilt. Wir berechnen nun die Werte der Funktion an drei Stellen : $x = \frac{1}{2},\ x = \frac{3}{2},\ x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Es gilt $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$, $f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}$, $f(\frac{3}{2}) = \frac{11}{6}$. Der kleinste von den drei Werten ist $\sqrt{2}$ und der grösster Wert ist $\frac{11}{6}$. Deshalb ist das Minimum der Funktion $\sqrt{2}$ und das Maximum $\frac{11}{6}$.

b) **i)**

$$\int_0^1 \frac{x+5}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}(x^2+1) + 5\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^1 + 5\arctan x\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{5}{4}\pi\,.$$

ii) Mit der partiellen Integration bekommen wir für $|x| \leqslant 1$

$$\int x^2 \arcsin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\arcsin(x) - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\arcsin(x) - \frac{1}{6}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}(x^2-1)$$

$$= \frac{x^3}{3}\arcsin(x) - \frac{1}{6}\int \frac{(-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}(1-x^2) = \frac{x^3}{3}\arcsin(x) - \frac{1}{6}\int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}(1-x^2)$$

$$+\frac{1}{6}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}(1-x^2) = \frac{x^3}{3}\arcsin(x) - \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{6}\cdot 2(1-x^2)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{x^3}{3}\arcsin(x) - \frac{1}{9}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,.$$

c) Wir müssen zeigen, dass $\lim_{a\to\infty}\int_1^a \frac{\cos(2x)}{x}\mathrm{d}x$ existiert. Es gilt

$$\lim_{a\to\infty}\int_1^a \frac{\cos(2x)}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty}\left[\frac{\sin(2x)}{2x}\Big|_1^a + \frac{1}{2}\int_1^a \frac{\sin(2x)}{x^2}\,\mathrm{d}x\right] = -\frac{\sin(2)}{2} + \frac{1}{2}\lim_{a\to\infty}\int_1^a \frac{\sin(2x)}{x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Nach dem Majoranten Kriterium konvergiert das Integral $\int_1^\infty \frac{\sin(2x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$, weil $|\sin(2x)| \leqslant 1$ ist und das integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1$ konvergent ist.

Aufgabe 4

a) Für $n = 1$ gilt $4^1 = 1^2 + 3^1$. Also stimmt die Aussage für $n = 1$.

Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt. Zu zeigen ist, dass die Aussage für $n + 1$ gilt und zwar

$$4^{(n+1)} \geqslant (n+1)^2 + 3^{(n+1)}.$$

Nach der Induktionsannahme gilt

$$4^{(n+1)} = 4 \cdot 4^4 \geqslant 4 \cdot (n^2 + 3^n) > 4n^2 + 3 \cdot 3^n = (2n)^2 + 3^{(n+1)} > (n+1)^2 + 3^{(n+1)}.$$

Deshalb gilt die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Mittels der Zeilenumformungen, bringen wir die Matrix A auf Zeilennormalform (die Zeilen werden mit Z_1, Z_2, Z_3 bezeichnet).

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & 9 \\ 8 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to \frac{1}{8} Z_2]{Z_3 \to Z_3 + \frac{1}{3} Z_1} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & 9 \\ 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 \leftrightarrow Z_2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[Z_1 \to Z_1 + \frac{3}{4} Z_2]{Z_2 \to \frac{1}{3} Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{11}{4} \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0\,. \end{pmatrix}$$

Mittels des -1 Ergänzungstricks bekommen wir,dass

$$Kern(A) = \operatorname{lin} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{11}{4} \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Da $\dim \operatorname{Kern}(A) + \dim \operatorname{Bild}(A) = 4$ (4 ist die Anzahl der Spalten der Matrix A) bekommen wir, dass $\dim \operatorname{Bild}(A) = 2$. Aber das Bild von A ist der lineare Aufspann der Spalten von A, und da die erste und die zweite Spalten von A linear unabhängig sind bekommen wir, dass

$$\operatorname{Bild}(A) = \operatorname{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$