Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
PD Dr. Peer Kunstmann

Herbst 2016
28.07.2016

Modulprüfung / Bachelor

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Aufgabe 1 (3 + 7 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$

b) Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \frac{3}{2}\, x - \ln(1 + x^2), \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Ist f streng monoton wachsend? Begründen Sie Ihre Antwort.

ii) Ist f bijektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.
Hinweis: Betrachten Sie $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Aufgabe 2 (3 + 4 + 3 Punkte)

a) Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden reellen Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(2n)!} x^n.$$

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) x^{2k}\, ?$$

Finden Sie für diese $x \in \mathbb{R}$ einen geschlossenen Ausdruck für die Reihe ("geschlossen" bedeutet hier einen Ausdruck "ohne Reihe").

c) Untersuchen Sie den folgenden Limes auf Existenz und berechnen Sie ihn gegebenenfalls:

$$\lim_{x\to\infty} e^x (\ln(2 + e^x) - x).$$

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (3 + 4 + 3 Punkte)

a) Bestimmen und skizzieren Sie die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, die der folgenden Bedingung genügen:

$$|z|^2 - 6\,\mathrm{Re}\,(z) \leqslant 0.$$

b) Berechnen Sie die folgenden Integrale

i) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(x)\,\mathrm{d}x,$

ii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$

c) Untersuchen Sie das folgende uneigentliche Integral auf Konvergenz und auf absolute Konvergenz:

$$\int_0^\infty \frac{1+\sin(x)}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 4 (3 + 4 + 3 Punkte)

Sei $C[0,2\pi]$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellwertigen stetigen Funktionen auf $[0,2\pi]$ und seien $b_1, b_2, b_3 \in C[0,2\pi]$ gegeben durch $b_1(x) = 1, b_2(x) = \cos(x), b_3(x) = \sin(x)$. Sei $V := \mathrm{lin}\,\{b_1, b_2, b_3\}$.

a) Zeigen Sie, dass b_1, b_2, b_3 linear unabhängig sind.
Hinweis: Betrachten Sie $b_j(x)$ für $j \in \{1,2,3\}$ und $x \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$.

b) Sei $\phi = \arcsin(\frac{2}{\sqrt{5}})$. Durch

$$\begin{cases} T(b_1) = 2 + \cos(x) \\ T(b_2) = 1 + \sqrt{5}\sin(x+\phi) \\ T(b_3) = \sqrt{5}\sin(x + \frac{\pi}{2} - \phi) \end{cases}$$

wird eine lineare Abbildung $T : V \to C[0,2\pi]$ definiert. Zeigen Sie, dass $T(V) \subseteq V$ gilt, und bestimmen Sie die Darstellungsmatrix A von $T : V \to V$ bezüglich der Basis b_1, b_2, b_3 im Argument- und im Zielraum.

c) Untersuchen Sie die folgende Matrix auf Invertierbarkeit und berechnen Sie gegebenenfalls die inverse Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:

Die Klausurergebnisse sind ab **17.10.2016** unter `http://www.math.kit.edu/iana1/` im Internet einsehbar.

Die Klausureinsicht findet am Donnerstag, den **20.10.2016**, von 16 bis 18 Uhr im Hörsaal neue Chemie (Geb.30.46) statt.

Die mündlichen Nachprüfungen sind in der Woche vom **24.10.2016** bis **28.10.2016**.