Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
PD Dr. Peer Kunstmann

Herbst 2016
28.07.2016

Modulprüfung / Bachelor

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Aufgabe 1 (3 + 7 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$

Lösungsvorschlag: Beweis durch vollständige Induktion. Für $n = 1$ gilt (Induktionsanfang):

$$\sum_{k=1}^{1} (-1)^k k^2 = -1 = (-1)^1 \, \frac{1 \cdot 2}{2}.$$

Es gelte nun für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$ als Induktionsvoraussetzung (IV)

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$

Somit gelingt der Induktionsschluss folgendermaßen:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k^2 &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 + (-1)^{n+1}(n+1)^2 \overset{(IV)}{=} (-1)^n \left(\frac{n(n+1)}{2} - (n+1)^2 \right) \\ &= (-1)^n (n+1) \left(\frac{n}{2} - n - 1 \right) = (-1)^{n+1}(n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \\ &= (-1)^{n+1} \frac{(n+1)(n+2)}{2}.\end{aligned}$$

b) Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \frac{3}{2}\, x - \ln(1 + x^2), \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Ist f streng monoton wachsend? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschlag: f ist in jedem $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar und die Ableitung lautet:

$$f'(x) = \frac{3}{2} - \frac{2x}{1 + x^2}.$$

Da $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$ gilt, ist $x^2 + 1 \geqslant 2x$, sodass

$$f'(x) = \frac{3}{2} - \frac{2x}{1 + x^2} \geqslant \frac{3}{2} - 1 \geqslant \frac{1}{2} > 0.$$

Damit ist f streng monoton wachsend.

ii) Ist f bijektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.
Hinweis: Betrachten Sie $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Lösungsvorschlag: f ist als Komposition stetiger Funktionen auf $\mathbb{R}$ stetig. Es gilt

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{2}x - \ln(1+x^2) = -\infty$$

und

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{3}{2} - \frac{\ln(1+x^2)}{x}\right) = \infty,$$

da nach l'Hôpital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x+1/x} = 0$$

gilt. Nach dem Zwischenwertsatz ist f surjektiv. Nach **i**) ist f streng monoton wachsend und somit injektiv. Da f injektiv und surjektiv ist, ist f bijektiv.

Aufgabe 2 (3 + 4 + 3 Punkte)

a) Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden reellen Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(2n)!} x^n.$$

Lösungsvorschlag: Wir definieren die Folge der Koeffizienten $a_n := \frac{n^{2n}}{(2n)!}$ und betrachten $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{(n+1)^{2n+2}}{(2n+2)!}\frac{(2n)!}{n^{2n}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}(n+1)^2\frac{(2n)!}{(2n)!(2n+1)(2n+2)} \\ &= \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^2\left(\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}\right) = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^2\left(\frac{(n+1)}{2(2n+1)}\right) \\ &= \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^2\left(\frac{(1+\frac{1}{n})}{2(2+\frac{1}{n})}\right) \to \frac{e^2}{4} \quad (\text{für } n\to\infty).\end{aligned}$$

Somit ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $R = \frac{4}{e^2}$.

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)x^{2k}\,?$$

Finden Sie für diese $x \in \mathbb{R}$ einen geschlossenen Ausdruck für die Reihe ("geschlossen" bedeutet hier einen Ausdruck "ohne Reihe").

Lösungsvorschlag: Man betrachtet $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{(2k+1)x^{2k}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{2k+1}x^2 = x^2$ und findet mit dem Wurzelkriterium, dass die Reihe konvergiert, wenn $|x| < 1$, und divergiert, wenn $|x| > 1$. Ist $|x| = 1$, so ist $(2k+1)x^{2k} = (2k+1)$ keine Nullfolge. Die Reihe divergiert also in diesem Fall.

Benutzt man die Identität $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$, so findet man die geschlossene Darstellung.

$$\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)x^{2k} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k+1}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}\right) \underset{|x|<1}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{1-x^2}\right)$$
$$= \frac{1}{1-x^2} - \frac{x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}.$$

c) Untersuchen Sie den folgenden Limes auf Existenz und berechnen Sie ihn gegebenenfalls:

$$\lim_{x\to\infty} e^x(\ln(2+e^x) - x).$$

Lösungsvorschlag: Wie folgende Rechnung zeigt, existiert der Grenzwert.

$$\lim_{x\to\infty} e^x(\ln(2+e^x) - x) = \lim_{x\to\infty} e^x(\ln(2+e^x) - \ln(e^x)) = \lim_{x\to\infty} e^x(\ln(\frac{2+e^x}{e^x}))$$
$$= \lim_{x\to\infty} e^x(\ln(\frac{2}{e^x}+1)) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+2\frac{1}{e^x})}{\frac{1}{e^x}} \overset{y:=\frac{1}{e^x}}{=} \lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+2y)}{y} \overset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{y\to 0}\frac{2}{1+2y} = 2.$$

Aufgabe 3 (3 + 4 + 3 Punkte)

a) Bestimmen und skizzieren Sie die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, die der folgenden Bedingung genügen:

$$|z|^2 - 6\,\mathrm{Re}\,(z) \leqslant 0.$$

Lösungsvorschlag: Wir schreiben $z = x + iy$ mmit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann wird die Ungleichung zu $x^2 + y^2 - 6x \leqslant 0$ oder $(x-3)^2 + y^2 \leqslant 3^2$.

Deshalb ist die Menge eine Kreisscheibe mit Zentrum $3 + 0i = 3$ und Radius 3.

b) Berechnen Sie die folgenden Integrale

i) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(x)\,\mathrm{d}x,$

ii) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$

Lösungsvorschlag: **i)** Mit partieller Integration bekommen wir

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-\pi}^{\pi} x(\cos(x))'\,\mathrm{d}x = -x\cos(x)|_{x=-\pi}^{x=\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}(x)'\cos(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\pi + \int_{-\pi}^{\pi}\cos(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi + (\sin(x))|_{x=-\pi}^{x=\pi} = 2\pi.$$

ii) Die Substitution $t = x^2$ gibt $dt = 2xdx$ also

$$\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}2x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1\left(1 - \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t$$
$$= 1 - \ln(t+1)|_{t=0}^{t=1} = 1 - \ln(2).$$

c) Untersuchen Sie das folgende uneigentliche Integral auf Konvergenz und auf absolute Konvergenz:

$$\int_0^\infty \frac{1+\sin(x)}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,\mathrm{d}x.$$

Lösungsvorschlag: Da $|1+\sin(x)| \leqslant 2$ bekommen wir

$$\left|\frac{1+\sin(x)}{\sqrt{x}\,(1+x)}\right| \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}\,(1+x)}.$$

Wir werden zeigen, dass $\int_0^\infty \frac{2}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,\mathrm{d}x$ konvergent ist, und dann folgt mit dem Majoranten-Kriterium, dass

$$\int_0^\infty \frac{1+\sin(x)}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,\mathrm{d}x$$

absolut konvergent (und deshalb konvergent) ist. Es gilt

$$\int_0^\infty \frac{2}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{2}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,\mathrm{d}x.$$

Da auf $[0,1]$ $\frac{2}{\sqrt{x}\,(1+x)} \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}}$ und $\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ konvergent ist, so ist auch $\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,\mathrm{d}x$ konvergent.

Da auf $[1,\infty)$ $\frac{2}{\sqrt{x}\,(1+x)} \leqslant \frac{2}{x\sqrt{x}}$ und $\int_1^\infty \frac{2}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ konvergent ist, so ist auch $\int_1^\infty \frac{2}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,\mathrm{d}x$ konvergent.

Deshalb ist $\int_0^\infty \frac{2}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,\mathrm{d}x$ konvergent, was noch zu zeigen war.

Aufgabe 4 (3 + 4 + 3 Punkte)

Sei $C[0,2\pi]$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellwertigen stetigen Funktionen auf $[0,2\pi]$ und seien $b_1, b_2, b_3 \in C[0,2\pi]$ gegeben durch $b_1(x) = 1, b_2(x) = \cos(x), b_3(x) = \sin(x)$. Sei $V := \operatorname{lin}\{b_1, b_2, b_3\}$.

a) Zeigen Sie, dass b_1, b_2, b_3 linear unabhängig sind.
Hinweis: Betrachten Sie $b_j(x)$ für $j \in \{1,2,3\}$ und $x \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$.

Lösungsvorschlag: Seien $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ so dass $\sum_{j=1}^3 a_j b_j(x) = 0$. Wenn $x = 0$ bekommen wir $a_1 + a_2 = 0$. Wenn $x = \pi$ bekommen wir $a_1 - a_2 = 0$. Wenn wir diese beiden Gleichungen addieren, bekommen wir $a_1 = 0$ und deshalb $a_1 = a_2 = 0$. Wenn wir dann $x = \frac{\pi}{2}$ einsetzen, bekommen wir $a_3 = 0$. Also ist $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ und die Funktionen b_1, b_2, b_3 sind linear unabhängig.

b) Sei $\phi = \arcsin(\frac{2}{\sqrt{5}})$. Durch

$$\begin{cases} T(b_1) = 2 + \cos(x) \\ T(b_2) = 1 + \sqrt{5}\sin(x+\phi) \\ T(b_3) = \sqrt{5}\sin(x + \frac{\pi}{2} - \phi) \end{cases}$$

wird eine lineare Abbildung $T : V \to C[0,2\pi]$ definiert. Zeigen Sie, dass $T(V) \subseteq V$ gilt, und bestimmen Sie die Darstellungsmatrix A von $T : V \to V$ bezüglich der Basis b_1, b_2, b_3 im Argument- und im Zielraum.

Lösungsvorschlag: Wir haben $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$ und $\cos(\frac{\pi}{2} - \phi) = \sin\phi = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Also ist $\sin(\frac{\pi}{-}\phi) = \cos\phi = \sqrt{1-\sin^2\phi} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Nach den Additionstheoremen ist also

$$T(b_2) = 1 + \sqrt{5}\sin(x+\phi) = 1 + \sqrt{5}(\sin x\cos\phi + \cos x \sin\phi) = 1 + 2\cos x + \sin x$$

und

$$T(b_3) = \sqrt{5}\sin(x + \frac{\pi}{2} - \phi) = \sqrt{5}(\sin x \sin\phi + \cos x \cos\phi) = 2\sin x + \cos x.$$

Wir haben also $T(b_j) \in V$ für $j = 1, 2, 3$ und daraus folgt $T(V) \subseteq V$. Außerdem können wir die Darstellungsmatrix A ablesen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

c) Untersuchen Sie die folgende Matrix auf Invertierbarkeit und berechnen Sie gegebenenfalls die inverse Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösungsvorschlag: Wir lösen die Gleichung $AX = I$ mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 3 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Ersetze Z_2 durch $Z_2 + (2/3)Z_1$ und ersetze Z_3 durch $Z_3 - (1/3)Z_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8/3 & -4/3 & 2/3 & 1 & 0 \\ 0 & -4/3 & 8/3 & -1/3 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Ersetze Z_3 durch $Z_3 + (1/2)Z_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8/3 & -4/3 & 2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1/2 & 1 \end{array}\right).$$

Bringe die Diagonalelemente links auf 1:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/4 & 3/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/2 \end{array}\right).$$

Ersetze Z_2 durch $Z_2 + (1/2)Z_3$ und ersetze Z_1 durch $Z_1 - (1/3)Z_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2/3 & 0 & 1/3 & -1/12 & -1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/2 \end{array}\right).$$

Ersetze Z_1 durch $Z_1 + (2/3)Z_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/2 \end{array}\right).$$

Wir sehen, dass A invertierbar ist und dass die Inverse von A gegeben ist durch

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$