

# Lösungsvorschläge.

$$(1a) \quad |1-i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}. \text{ Also } 1-i = \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + i \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right)$$

$$\Rightarrow 1-i = \sqrt{2} \left( \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$\Rightarrow 1-i = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}. \text{ Also}$$

$$(1-i)^{21} = \left( \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \right)^{21} = 2^{\frac{21}{2}} e^{-i\frac{21\pi}{4}} = 2^{\frac{21}{2}} \underbrace{e^{-i\frac{24\pi}{4}}}_{=1} e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow (1-i)^{21} = 2^{\frac{21}{2}} e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2^{\frac{21}{2}} \left( \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right) =$$

$$= 2^{\frac{21}{2}} \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{2^{\frac{21}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} (i-1) = 2^{10} (i-1).$$

$$\text{Also } \operatorname{Re} (1-i)^{21} = -2^{10} = -1024 \quad \operatorname{Im} (1-i)^{21} = 2^{10} = 1024.$$

$$(1b) \quad f'(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3). \text{ Also } f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ oder } x=3$$

$$f''(x) = 2x - 4. \text{ Also } f''(1) = 2 \cdot 1 - 4 < 0, f''(3) = 2 \cdot 3 - 4 > 0.$$

Also hat  $f$  ein lokales Maximum in 1 und ein lokales Minimum in 3. ( $f(1) = \frac{7}{3}$ ,  $f(3) = 1$ ). Die Funktion hat keine lokale

Minima oder Maxima da  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  und  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .

(1k). Sie  $f: [0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$   $f(x) = \tan(x) - x$ . Dann  
 $f$  ist stetig auf  $[0, \frac{\pi}{2})$ .  $f(0) = \tan(0) - 0 = 0 < \pi$ .  
und  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \infty$  (" $> \pi$ "). Also wegen des

Zwischenwertsatzes  $\exists x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$  mit  
 $f(x_0) = \pi \Leftrightarrow \tan(x_0) - x_0 = \pi$ .

$f$  ist dbat in  $[0, \frac{\pi}{2})$  und  $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} - 1$

Also  $f'(x) > 0$  auf  $(0, \frac{\pi}{2})$  da  $\cos^2(x) < 1$   
auf  $(0, \frac{\pi}{2})$ . Da auch  $f$  stetig ist auf  
 $[0, \frac{\pi}{2})$  und  $f'(x) > 0$  auf  $(0, \frac{\pi}{2})$  ist  $f$   
streng monoton wachsend auf  $[0, \frac{\pi}{2})$ . Also  
es gibt genau ein  $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$  mit  $f(x_0) = \pi$   
 $\Leftrightarrow \tan(x_0) - x_0 = \pi$  was zu zeigen  
war.

$$(2a). (i) T_1(f, \pi)(x) = f(\pi) + \frac{f'(\pi)}{1!}(x-\pi). \text{ Aber}$$

$$f(\pi) = \cos(\sin(\pi)) = \cos(0) = \overset{1!}{1}.$$

$$f'(x) = -\sin(\sin(x))(\sin(x))' = -\sin(\sin(x))\cos(x). \quad (1)$$

$$\Rightarrow f'(\pi) = -\sin(\sin(\pi))\cos(\pi) = -\sin(0)(-1) = 0.$$

$$\text{Also } T_1(f, \pi)(x) = 1 + \frac{0}{1!}(x-\pi) = 1.$$

(ii). Nach dem Satz von Taylor gibt es  $\xi$  zwischen  $x$  und  $\pi$  mit.

$$f(x) - T_1(f, \pi) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x-\pi)^2. \quad (2)$$

$$\text{Bd + } f''(x) \overset{(1)}{=} (-\sin(\sin(x))\cos(x))' = \sin(\sin(x))\sin(x).$$

$$- \cos(\sin(x))(\sin(x))'\cos(x) \Rightarrow$$

$$f''(\xi) = \sin(\sin(\xi))\sin(\xi) - \cos(\sin(\xi))(\cos(\xi))^2. \quad \text{Also}$$

$$|f''(\xi)| \leq \underbrace{|\sin(\sin(\xi))|}_{\leq 1} \underbrace{|\sin(\xi)|}_{\leq 1} + \underbrace{|\cos(\sin(\xi))|}_{\leq 1} \underbrace{|\cos(\xi)|^2}_{\leq 1} \leq 2.$$

$$\text{Also } f''(\xi) \geq -2. \quad (3)$$

$$(2), (3) \quad f(x) - T_1(f, \pi) \geq -|x-\pi|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

was zu zeigen war.

(2b) Sei  $y = (x-1)^2$ . Dann die Potenzreihe  
wird  $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left| \frac{5+(-1)^n}{3} + \frac{1}{n} \right|^n}_{=: c_n} y^n$ .

Da  $\sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{\left| \frac{5+(-1)^n}{3} + \frac{1}{n} \right|} = \frac{5+(-1)^n}{3} + \frac{1}{n}$  gilt.

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \begin{cases} \underbrace{2 + \frac{1}{n}}_{\rightarrow 2}, & n \text{ gerade} \\ \underbrace{\frac{4}{3} + \frac{1}{n}}_{\rightarrow \frac{4}{3}}, & n \text{ ungerade} \end{cases} \quad \text{Also}$$

$\limsup \sqrt[n]{|c_n|} = 2$  (größte Häufungswert).

$\Rightarrow R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}} = \frac{1}{2}$ . Also

$|y| < \frac{1}{2} \Rightarrow$  Reihe konvergent.  $|y| > \frac{1}{2} \Rightarrow$  Reihe divergent.

$|y| = \frac{1}{2}$ . Dann da  $y = (x-1)^2 > 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

lautet die Terme der Reihe  $\left| \frac{5+(-1)^n}{3} + \frac{1}{n} \right|^n \left( \frac{1}{2} \right)^n = \underbrace{\left( \frac{5+(-1)^n}{6} + \frac{1}{2n} \right)^n}_{\geq 1}$

Die Terme der  
Reihe gehen nicht gegen  
Null.

$\left( 1 + \frac{1}{2n} \right)^n \geq 1$   
für  $n$  gerade

Insgesamt: Konvergiert die Potenzreihe  
 $\Leftrightarrow |y| < \frac{1}{2} \xleftrightarrow{y=(x-1)^2} (x-1)^2 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow |x-1| < \frac{1}{\sqrt{2}}$   
 $\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} < x-1 < \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$

---

(3a) 1A:  $\sum_{k=1}^1 6k(k+2) = 6(1+2) = 18.$   $\Rightarrow$  Für  $n=1$  stimmt die Aussage.

$1(1+1)(2 \cdot 1 + 7) = 2 \cdot 9 = 18$

Annahme:  $\sum_{k=1}^n 6k(k+2) = n(n+1)(2n+7). \quad (*)$

Z. Z.  $\sum_{k=1}^{n+1} 6k(k+2) = (n+1)(n+2)(2(n+1)+7) \Leftrightarrow$

$$\sum_{k=1}^{n+1} 6k(k+2) = (n+1)(n+2)(2n+9).$$

In der Tat  $\sum_{k=1}^{n+1} 6k(k+2) = \sum_{k=1}^n 6k(k+2) + 6(n+1)(n+3)$

$\stackrel{(*)}{=} n(n+1)(2n+7) + 6(n+1)(n+3) = (n+1)[n(2n+7) + 6(n+3)]$

$= (n+1)[2n^2 + 7n + 6n + 18] = (n+1)(2n^2 + 13n + 18).$

$= (n+1)(n+2)(2n+9)$  (Da  $(n+2)(2n+9) = 2n^2 + 9n + 4n + 18 = 2n^2 + 13n + 18$ )

was zu zeigen war.

Also stimmt die Aussage  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

(b) i) Sei  $u = x^4$ . Dann  $du = (x^4)' dx = 4x^3 dx$ .

Also  $\int_0^2 \underbrace{4x^3}_{=du} \underbrace{e^{x^4}}_{e^u} dx = \int_0^{2^4} e^u du = \int_0^{16} e^u du$   
 $= e^u \Big|_0^{16} = e^{16} - e^0 = e^{16} - 1.$

(ii)  $\int_0^\pi x \cos(x) dx = \int_0^\pi x (\sin(x))' dx =$   
 $= x \sin(x) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi (x)' \sin(x) dx = x \sin(x) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin(x) dx$   
 $= \cos(x) \Big|_0^\pi = \cos(\pi) - \cos(0) = -2.$   $= 0$  da  $\sin(0) = \sin(\pi) = 0.$

(c)  $\frac{\cos(x)}{x} \geq \frac{\cos(1)}{x} \quad \forall x \in [0, 1]$  da  
 $\cos$  monoton fallend ist auf  $[0, 1]$ .

Da aber  $\int_0^1 \frac{\cos(1)}{x} dx = \cos(1) \int_0^1 \frac{1}{x} dx$   
divergent, so ist nach dem

Minorantenkriterium das Integral

$$\int_0^1 \frac{\cos(x)}{x} dx \text{ divergent.}$$

$$(4a) \quad (A|I) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} z_2 \rightarrow z_2 - 2z_1 \\ z_3 \rightarrow z_3 - 3z_1 \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{z_1 \rightarrow z_1 - z_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{z_1 \rightarrow z_1 - z_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{z_2 \rightarrow \frac{1}{2}z_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) = A^{-1}$$

Ist  $A\vec{x} = \vec{0}$ . Dann  $\underbrace{A^{-1}A}_{I}\vec{x} = A^{-1}\vec{0} = \vec{0} \xrightarrow{I\vec{x}=\vec{x}} \vec{x} = \vec{0}$ .

Also  $\text{Kern } A = \{\vec{0}\}$ .

Die Gleichung  $A\vec{x} = \vec{y}$  hat  $\forall y \in \mathbb{R}^3$  Lösung

da  $A\vec{x} = \vec{y} \Leftrightarrow A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{y}$ .

Also  $\text{Bild } A = \mathbb{R}^3$ .

(4b).  $\vec{b}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}$  und da  $\|\vec{v}_1\| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + 1^2} = 2$  ist

$$\vec{b}_1 = \frac{\vec{v}_1}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{c}_2 = \vec{v}_2 - (\vec{v}_2 \cdot \vec{b}_1) \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$= 1 - 2 + 1 = 0.$

$$\Rightarrow \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Also}$$

$$\vec{b}_2 = \frac{\vec{c}_2}{\|\vec{c}_2\|} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\underbrace{\|\vec{c}_2\|}_{=2} \text{ (wie vorher)}$

$$\vec{c}_3 = \vec{v}_3 - (\vec{v}_3 \cdot \vec{b}_1) \vec{b}_1 - (\vec{v}_3 \cdot \vec{b}_2) \vec{b}_2$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=4} \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{=4}$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b}_3 = \frac{\vec{c}_3}{\|\vec{c}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

da  $\|\vec{c}_3\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}$ .  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$  ist ONB von  $\text{lin}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$