Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. Ioannis Anapolitanos

Herbst 2019
02.09.2019

Modulprüfung / Bachelor
Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Aufgabe 1 **(8 + 4 + 8 Punkte)**

a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k(3k+1) = n(n+1)^2.$$

b) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

c) Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil der Zahl $(\sqrt{3} - 3i)^{100}$.

Aufgabe 2 **(10 + 10 Punkte)**

a) **i)** Sei $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Taylor, dass es ein c zwischen $0, x$ gibt mit

$$\sin(x) = x - \frac{\cos(c)x^3}{3!}.$$

ii) Zeigen Sie mit Hilfe des Teils **(i)**, dass

$$\left|\frac{\sin(x)}{x} - 1\right| \leqslant \frac{1}{150}, \qquad \forall x \in \left(-\frac{2}{10}, \frac{2}{10}\right) \setminus \{0\}.$$

b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, so dass die folgende reelle Potenzreihe konvergent ist:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} (x+10)^n.$$

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (6 + (4 + 4) + 6 Punkte)

a) Sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x) + \sin(x)$. Zeigen Sie, dass f genau eine Nullstelle in $(\frac{1}{e}, 1)$ besitzt.

b) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

i) $$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}\,dx.$$

ii) $$\int_0^1 x \arctan(x)dx.$$

c) Zeigen Sie, dass das folgende uneigentliche Integral konvergent ist:

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos(x)}{x^{2,5}}\,dx.$$

<u>**Hinweis**</u>: Sie können unter anderem die Aufgabe 1b) verwenden.

Aufgabe 4 (8 + 6 + 6 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Inverse der Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 10 \end{pmatrix}$.

b) Für welche $a, b, \in \mathbb{R}$ ist der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ b \end{pmatrix}$ im Bild der Matrix $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Skizzieren Sie die folgenden Mengen und Untersuchen Sie, ob sie Unterräume von $\mathbb{R}^2$ sind:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geqslant 0\}.$$
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3(x + 1) + 2y = 3\}.$$

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:

Die Klausurergebnisse hängen ab dem **14.10.2019**, am Schwarzen Brett neben Zimmer 2.027 im Mathematik-Gebäude 20.30 aus.

Die Klausureinsicht findet am Donnerstag, den **17.10.2019**, von 16 bis 18 Uhr in Daimler Hörsaal (Geb. 10.21) statt.

Die mündlichen Nachprüfungen sind vom **21.10.2019** bis **31.10.2019**.