

(1a) Für $n=1$

$$\sum_{k=1}^1 k(3k+1) = 1(3 \cdot 1 + 1) = 4.$$

Aussage stimmt
für $n=1$.

$$n(n+1)^2 = 1(1+1)^2 = 4$$

Annahme: $\sum_{k=1}^n k(3k+1) = n(n+1)^2$ (*) für ein $n \in \mathbb{N}$

z.z., $\sum_{k=1}^{n+1} k(3k+1) = (n+1)(n+2)^2$

In der Tat $\sum_{k=1}^{n+1} k(3k+1) =$

$$= \sum_{k=1}^n k(3k+1) + (n+1)(3(n+1)+1) =$$

$$n(n+1)^2 + (n+1)(3n+4) = (n+1)[n(n+1) + 3n+4]$$

$$= (n+1) \underbrace{(n^2 + 4n + 4)}_{(n+2)^2} = (n+1)(n+2)^2$$

was zu zeigen war. Also
stimmt die Aussage $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{0}{0}$$

Da aber $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(x))'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 \cdot \sin(x)}{2x} = \frac{0}{0}$

und $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin(x))'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{2} = \frac{\cos(0)}{2} = \frac{1}{2}$

bekommen wir mit der Regel von l'Hospital, dass $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

$$(c) \quad |\sqrt{3} - 3i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-3)^2} = \sqrt{12}$$

$$\text{Also } \sqrt{3} - 3i = \sqrt{12} \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} - \frac{3}{\sqrt{12}} i \right)$$

$$= \sqrt{12} \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} - \frac{3}{2\sqrt{3}} i \right) = \sqrt{12} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)$$

$$= \sqrt{12} e^{i\varphi}$$

Wobei $\varphi = \frac{\operatorname{Re}(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} > 0$ $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$

$$\text{Also } \sqrt{3} - 3i = \sqrt{12} e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{3} - 3i)^{100} = (2\sqrt{3})^{100} e^{-i\frac{100\pi}{3}}$$

$$= 2^{100} \cdot 3^{50} e^{-\frac{i \cdot 102\pi}{3}} e^{i \frac{2\pi}{3}}$$

Aber $e^{-\frac{i \cdot 102\pi}{3}} = e^{-i \cdot 34\pi} = 1 \quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} - 3i)^{100} &= 2^{100} \cdot 3^{50} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= 2^{100} \cdot 3^{50} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \end{aligned}$$

Also $\operatorname{Re}[(\sqrt{3} - 3i)^{100}] = -2^{99} \cdot 3^{50}$

$$|\operatorname{Im}[(\sqrt{3} - 3i)^{100}]| = 2^{99} \cdot 3^{50} \sqrt{3}$$

(2.a) (i) $f(x) = \sin(x)$, $f \in C^3(\mathbb{R})$ Taylor

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(c)}{3!}x^3$$

$f(x) = \sin x \Rightarrow f(0) = \sin 0 = 0$ c zwischen $0, x$.

$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = \cos 0 = 1$

$f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(0) = \sin 0 = 0$

$f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(c) = -\cos(c)$

Also $\sin x = x - \frac{\cos(c)x^3}{3!}$ c zwischen $0, x$.

(ii) Ist $x \in (-\frac{2}{10}, \frac{2}{10}) \setminus \{0\}$, dann

$$\sin(x) - x = -\frac{\cos(c)}{3!} x^3 \quad \underline{\underline{x \neq 0}}$$

$$\frac{\sin(x)}{x} - 1 = -\frac{\cos(c)}{3!} x^2 \Rightarrow$$

$$\left| \frac{\sin(x)}{x} - 1 \right| = |\cos(c)| \frac{|x|^2}{3!} \leq \frac{x^2}{3!} \leq \frac{(\frac{2}{10})^2}{3!} =$$

$$= \frac{4}{600} = \frac{1}{150}.$$

(b). Konvergenzradius $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}}}$

$$= \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\sqrt{n}}}} = 1 \quad \text{da } \sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Also $|x+10| < 1 \Rightarrow$ Potenzreihe konvergent.

$|x+10| > 1 \Rightarrow$ Potenzreihe divergent.

Wenn $|x+10| = 1$, dann entweder

$$x+10 = 1 \quad \text{oder} \quad x+10 = -1.$$

Ist $x+10=1$ dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} (x+10)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \text{ was divergiert}$$

ist, weil $\frac{1}{2} < 1$ (für $p > 0$ $\sum \frac{1}{n^p}$ konvergiert)

genau dann wenn $p > 1$).

Ist $x+10=-1$ dann.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} (x+10)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Die Reihe konvergiert nach dem
Leibnizkriterium (alternierende Reihe)

da $\frac{1}{\sqrt{n}} > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$ und

$\frac{1}{\sqrt{n}}$ ist monoton fallend.

Insgesamt Potenzreihe konvergiert

$\Leftrightarrow |x+10| < 1$ oder $x+10 = -1. \Leftrightarrow$

$$x \in [-11, 9)$$

$$3a) \quad f\left(\frac{1}{e}\right) = \ln\left(\frac{1}{e}\right) + \sin\left(\frac{1}{e}\right) = -1 + \sin\left(\frac{1}{e}\right) < 0.$$

$$\text{da } \frac{1}{e} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow[\text{wachsend}]{\substack{\text{sin streng} \\ \text{monoton}}} \sin\left(\frac{1}{e}\right) < \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$f(1) = \ln(1) + \sin(1) = \sin(1) > 0.$$

$$\text{weil } 1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

und da f stetig ist als Summe stetiger Funktionen nach dem

Zwischenwertsatz $\exists c \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ mit

$f(c) = 0$. Zu zeigen, dass es genau eine Nullstelle gibt. beobachten wir,

$$\text{dass } f'(x) = \frac{1}{x} + \cos(x) > 0 \text{ auf}$$

$$\left(\frac{1}{e}, 1\right) \subset \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ da } \frac{1}{x} > 0 \text{ und}$$

$$\cos(x) > 0 \text{ auf } \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \text{ Also ist } f$$

streng monoton wachsend in $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ deshalb hat sie genau eine Nullstelle in $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$.

$$(b)(i) \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} dx = 2 du.$$

$$u = \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx.$$

$$x=1 \Rightarrow u=1, \quad x=4 \Rightarrow u=2.$$

$$\text{Also } \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} dx = \int_1^2 \frac{2 du}{u+2}.$$

$$= 2 \ln(u+2) \Big|_1^2 = 2 (\ln(4) - \ln(3)) = 2 \ln\left(\frac{4}{3}\right).$$

$$(ii). \int_0^1 x \arctan(x) dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}\right)' \arctan(x) dx$$

$$\stackrel{\text{PI.}}{=} \frac{x^2}{2} \arctan(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} (\arctan(x))' dx.$$

$$= \frac{1}{2} \arctan(1) - 0 - \int_0^1 \frac{x^2}{2(1+x^2)} dx.$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx.$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \arctan(x) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}.$$

$$(c) \int_0^{\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^{2.5}} dx = \int_0^1 \frac{1-\cos(x)}{x^{2.5}} dx + \int_1^{\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^{2.5}} dx.$$

Da auf $(1, \infty)$ $\left| \frac{1-\cos(x)}{x^{2.5}} \right| \leq \frac{2}{x^{2.5}}$ (da $|\cos| \leq 1$),

und $\int_1^{\infty} \frac{2}{x^{2.5}} dx$ konvergiert (weil

$2.5 > 1$) nach Majorantenkriterium.

konvergiert das Integral $\int_1^{\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^{2.5}} dx$.

Auf $[0, 1]$ gilt $\frac{1-\cos(x)}{x^{2.5}} = \frac{1}{x^{0.5}} \cdot \frac{1-\cos(x)}{x^2}$.

Da $\frac{1-\cos(x)}{x^2}$ stetig ist in $[0, 1]$.

und nach (1b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

ist $\frac{1-\cos(x)}{x^2}$ beschränkt in $[0, 1]$ also

$\exists C > 0$ mit $\left| \frac{1-\cos(x)}{x^2} \right| \leq C \quad \forall x \in [0, 1]$.

Also auf $[0, 1]$ gilt $\left| \frac{1-\cos(x)}{x^{2.5}} \right| \leq \frac{C}{x^{0.5}}$ und

da $\int_0^1 \frac{1}{x^{0.5}} dx$ konvergiert

Konvergiert das Integral

$$\int_0^1 \frac{1-\cos(x)}{x^{2,5}} dx \text{ ebenso. Deshalb ist}$$

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos(x)}{x^{2,5}} dx \text{ konvergent.}$$

4a).
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{z_2 \rightarrow z_2 - 2z_1 \\ z_3 \rightarrow z_3 - 4z_1}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{z_1 \rightarrow z_1 - z_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{z_1 \rightarrow z_1 - z_2 \\ z_3 \rightarrow \frac{1}{2} z_3}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

Also
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 10 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ b \end{pmatrix} \in \text{Bild } B \Leftrightarrow \exists c, d \text{ mit}$$

$$c \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2c \\ ad \\ bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2c = 1 \\ ad = 3 \\ bd = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{2} \\ ad = 3 \\ b(d-1) = 0 \end{cases}$$

Also: wenn $a=3$ dann $d=1$

ist eine Lösung für beliebiges $b \in \mathbb{R}$.

Wenn $a=0$ dann $ad=0 \neq 3 \Rightarrow$ keine Lösung.

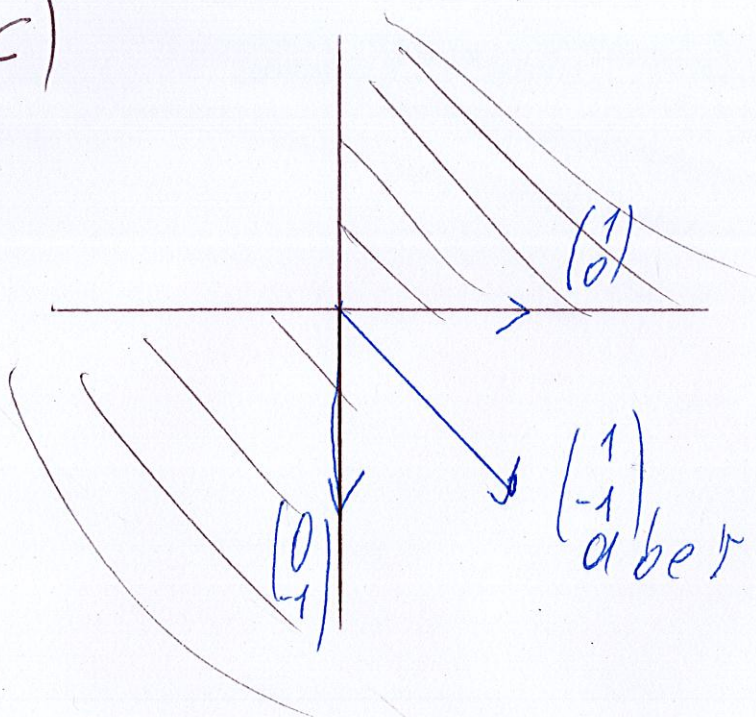
wenn $a \neq 0, 3$ dann $d = \frac{3}{a} \neq 1$.

also $(d-1)=0 \Rightarrow b=0$.

Also $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ b \end{pmatrix} \in \text{Bild } B \Leftrightarrow$

$(a=3 \text{ und } b \in \mathbb{R})$ oder $(b=0 \text{ und } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$

(c)



A ist kein Unterraum von $\mathbb{R}^2$ da z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in A, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in A$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \notin A.$$

(In der Tat $1 \cdot 0 = 0 \geq 0$, $0 \cdot (-1) = 0 \geq 0$
aber $1 \cdot (-1) = -1 < 0$).

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 3 + 2y = 3 \right\} =$$
$$= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 2y = 0 \right\}.$$

B ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in B \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2y_1 = 0 \\ 3x_2 + 2y_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 3(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) = 0.$$

$$\Rightarrow (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in B \text{ und}$$

ähnlich $(x, y) \in B \Rightarrow 3x + 2y = 0 \Rightarrow$
 $3(ax) + 2(ay) = 0 \Rightarrow (ax, ay) \in B \quad \forall a \in \mathbb{R}.$

