

Modulprüfung / Bachelor
Höhere Mathematik I für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik

Aufgabe 1 (6 + 8 + 6 Punkte)

- a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil, Betrag und Argument von

$$\left(\frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{1 - i\sqrt{3}} \right)^6.$$

- b) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \geq 5$ gilt:

$$3^{n-1} \geq 2n^2 - n.$$

- c) Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right).$$

Aufgabe 2 (4+8+8 Punkte)

- a) Untersuchen Sie ob der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{-3} \int_0^x \tan(t^2) dt$$

existiert, und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

- b) Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z + 2i)^n}{n^3} ?$$

- c) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz und auf absolute Konvergenz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi(n + \frac{1}{2}))}{\sqrt{n}}.$$

Aufgabe 3 (10+4+6 Punkte)

- a) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

i) $\int_0^1 x^3 e^{-x^2} dx$

ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5(x) dx$.

b) Berechnen Sie Minimum und Maximum der Funktion

$$f : \begin{cases} [2, 4] & \rightarrow \mathbb{R}, \\ x & \mapsto e^x(x^2 + 3x - 9). \end{cases}$$

c) Zeigen Sie die Konvergenz der uneigentlichen Integrale

(i)

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos^2 x}{x^3} dx$$

(ii)

$$\int_0^1 x^{-\frac{3}{2}} \sin 2x dx$$

Aufgabe 4 (14 + 6 Punkte)

a) Betrachten Sie die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 5}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie $\text{Kern}(A)$, $\text{Bild}(A)$, $\dim \text{Bild}(A)$ und alle Lösungen des Systems $A\vec{x} = \vec{b}$ für $\vec{b} = (-5, -4, 8)^T$.

b) Begründen Sie, dass die Gleichung

$$e^{\sin x} = 3x + 2$$

genau eine Lösung $x \in \mathbb{R}$ hat.