Modulprüfung HM-1
Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

a) Es gilt $\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{1-i\sqrt{3}}\right) = \frac{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} =$

$$= \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{-\pi/3}} = e^{i\frac{7}{12}\pi} \Rightarrow$$

$$z = \left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{1-i\sqrt{3}}\right)^6 = e^{i\frac{7}{2}\pi} = \underline{e^{-i\frac{\pi}{2}}}.$$

$$|z| = |e^{-i\frac{\pi}{2}}| = 1, \quad Arg(z) = -\frac{\pi}{2},$$

$$Re\, z = 0, \quad Im\, z = -1.$$

b) Für $n = 5$ haben wir

$$3^4 = 81 \geq 2\cdot 25 - 5 = 45 \quad \checkmark$$

Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt. Zu zeigen ist, dass die Aussage für $(n+1)$ gilt und zwar

$$3^n \geq 2(n+1)^2 - (n+1).$$

In der Tat

$$3^n = 3^{n-1} \cdot 3 \geq 3(2n^2 - n) = 6n^2 - 3n =$$

$$= 6n^2 - 3n - [2(n+1)^2 - (n+1)] +$$

$$+ [2(n+1)^2 - (n+1)] = 4n^2 - 6n - 1 +$$

$$+ [2(n+1)^2 - (n+1)].$$

Für $n \geq 5$ es gilt

$$4n^2 - 6n - 1 > 3n^2 - 6n = 3n(n-2) > 0$$

$$\Rightarrow \quad 3^n \geq 2(n+1)^2 - (n+1). \quad \blacksquare$$

c) Es gilt

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x \to 1} \frac{x - 1 - \ln x}{\ln x \cdot (x-1)} =$$

$$\overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} \cdot (x-1) + \ln x} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x - 1 + x \ln x} \overset{\text{l'Hospital}}{=}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{1 + \ln x + 1} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 2

a) Es gilt

$$\lim_{x\to 0} x^{-3}\int_0^x \tan(t^2)\,dt = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \tan(t^2)\,dt}{x^3} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\tan x^2}{3x^2} \overset{y=x^2}{=} \frac{1}{3}\lim_{y\to 0}\frac{\tan y}{y} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 1 = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}.$$

b) $$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^{-3}}} = \frac{1}{\left[\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\right]^{-3}} =$$

$$= 1, \quad \text{weil} \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1.$$

Die Reihe konvergiert für $|z+2i|<1$ und divergiert für $|z+2i|>1$.

Für $|z+2i|=1$ konvergiert die Reihe, weil die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ konvergent ist.

Also die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z+2i)^n}{n^3}$ ist konvergent für alle $z\in\mathbb{C}$ mit $|z+2i|\le 1$ und divergent für $|z+2i|>1$.

c) Für $n = 2k$ haben wir

$$\sin\left(\pi\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\right) = \sin\left(\pi\left(2k+\tfrac{1}{2}\right)\right) =$$

$$= \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

Für $n = 2k+1$

$$\sin\left(\pi\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\right) = \sin\left(\pi\left(2k+\tfrac{3}{2}\right)\right) = -1.$$

Also es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Die Reihe ist nicht absolut konvergent, weil die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}$$

divergent ist, aber die Reihe ist konvergent nach Leibnitz Kriterium, weil $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ist eine monoton fallende Nullfolge.

Aufgabe 3

a)

i) $$\int_0^1 x^3 e^{-x^2}\,dx \overset{y=x^2}{=\!=} \frac{1}{2}\int_0^1 y e^{-y}\,dy \overset{\text{part. Integr.}}{=\!=}$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-y}\cdot y\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-y}\,dy = -\frac{1}{2}e^{-1} - \frac{1}{2}e^{-1} +$$

$$+ \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1-2e^{-1}).$$

ii) $$\int_0^{\pi/2} \cos^5(x)\,dx \overset{u=\sin x}{=\!=} \int_0^1 [1-u^2]^2\,du =$$

$$= \int_0^1 (1-2u^2+u^4)\,du = \left(u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{u^5}{5}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}.$$

b) Da f eine stetige Funktion ist, annimt f auf dem Interval $[2,4]$ die maximale und minimale Werte.

$$f'(x) = e^x(x^2+3x-9) + e^x(2x+3) =$$

$$= e^x(x^2+5x-6) = e^x(x+5)(x-1) \neq 0$$

für $x \in [2,4]$.

Die Kandidaten für das Maximum

oder Minimum sind $x=2$ und $x=4$.

$$f(2) = e^2(4+6-9) = e^2 \leftarrow \text{Min.}$$

$$f(4) = e^4(16+12-9) = e^4 \cdot 17 \leftarrow \text{Max.}$$

c) i) $\int_1^\infty \frac{\cos^2 x}{x^3}\,dx$ is konvergent nach Majoranten Kriterium, weil $\left|\frac{\cos^2 x}{x^3}\right| \leq \frac{1}{x^3}$ und das Integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$ konvergiert.

ii) $|x^{-3/2}\sin 2x| = |x|^{-1/2} \cdot \left|\frac{\sin 2x}{x}\right| =$

$$= 2|x|^{-1/2}\left|\frac{\sin 2x}{2x}\right| \leq 2|x|^{-1/2}$$

$\int_0^1 x^{-3/2}\sin 2x\,dx$ is konvergent nach Majoranten Kriterium, weil das Integral $2\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}\,d\cancel{s}x$ konvergiert.

Aufgabe 4

a)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & -5 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_2 \to Z_2 - 7Z_3]{Z_1 \to Z_1 - 5Z_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -6 & -12 & -18 & -24 & -45 \\ 0 & -8 & -16 & -24 & -32 & -60 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_2 \to -\frac{1}{8} Z_2]{Z_1 \to -\frac{1}{6} Z_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 7{,}5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 7{,}5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3 \leftrightarrow Z_1]{Z_2 \to Z_2 - Z_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 7{,}5 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2 \leftrightarrow Z_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 7{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \to Z_1 - 2Z_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 7{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Mit Hilfe des -1 Ergänzungstricks bekommen wir

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 7{,}5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Also ist

$$\text{Kern } A = \text{lin}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Die allgemeine Lösung des Systems ist

$$X = \begin{pmatrix} -7 \\ 7{,}5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

Da $\dim \text{Kern } A + \dim \text{Bild } A = 5$ bekommen wir, dass $\dim \text{Bild } A = 2$ und da die erste und dritte Spalte von A linear unabhängig sind, bekommen wir

$$\text{Bild } A = \text{lin}\left\{\begin{pmatrix}5\\7\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\5\\3\end{pmatrix}\right\}$$

b) Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \to -e^{+\sin x} + 3x + 2.$$

Die Gleichung $e^{\sin x} = 3x + 2$ hat eine Lösung genau dann, wenn $f(x) = 0$.

Es gilt

$$f'(x) = -\cos x \, e^{\sin x} + 3 > 0, \quad \text{weil}$$

$$|\cos x \, e^{\sin x}| \leq |e^{\sin x}| \leq e^{1} < 3.$$

Die ~~funkt~~ Funktion ist monoton steigend und es gilt

$$f(-1) = -e^{-1} - 3 + 2 < 0,$$

$$f(1) = -e^{1} + 3 + 2 > 0.$$

Die Funktion f ist stetig und nach dem Zwischenwertsatz hat eine Nullstelle. Wegen Monotonie es kann nur eine Nullstelle geben. $\boxtimes$