Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. Ioannis Anapolitanos

Frühjahr 2021
06.09.2021

Modulprüfung / Bachelor
Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Aufgabe 1 (8 + 6 + 6 Punkte)

a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \Big(3k(k+1) + 2\Big) = n^3 + n.$$

b) Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil aller Lösungen der Gleichung

$$z^3 - 1 = 0.$$

c) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|2 - |2 - x|| < 2$.

Aufgabe 2 (10 + 10 Punkte)

a) **i)** Sei $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie mit Hilfe des Taylorsatzes, dass es ein c zwischen 0 und x gibt mit

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\cos(c)}{5!}x^5.$$

ii) Zeigen Sie mit Hilfe des Teils **i)**, dass

$$0 < \sin(0.1) - \left(0.1 - \frac{0.001}{6}\right) < 10^{-7}.$$

b) Wir betrachten die komplexe Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}\right)(z + i - 1)^n.$$

Bestimmen Sie die Menge K aller $z \in \mathbb{C}$, für die die Potenzreihe konvergent ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (8 + 6 + 6 Punkte)

a) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

i) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\,\mathrm{d}x$,

ii) $\displaystyle\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x.$

b) Zeigen Sie, dass das folgende uneigentliche Integral absolut konvergent ist:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}-1}{x^{1.5}}\mathrm{d}x.$$

c) Geben Sie eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, die alle natürlichen Zahlen als Häufungswerte hat. Sie müssen keine geschlossene Formel angeben sondern nur beschreiben, wie sie definiert wird. Erklären Sie warum die Folge alle natürliche Zahlen als Häufungswerte hat.

Aufgabe 4 (10 + 6 + 4 Punkte)

a) Wir betrachten die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie eine Zeilennormalform, sowie den Kern von A. Ist das System $A\vec{x} = \vec{b}$ für alle $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ lösbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Sei $n \in \mathbb{N}$, mit $n \geqslant 3$. In $\mathbb{R}^n$, mit dem Standardskalarprodukt betrachten wir drei Vektoren, $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$, die orthogonal sind und mit $\vec{v_j} \neq \vec{0}$ für alle $j \in \{1,2,3\}$. Zeigen Sie mittels der Definition der linearen unabhängigkeit, dass $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ linear unabhängig sind.

c) Sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Orthogonalprojektion von $\vec{w}$ auf dem linearen Aufspann von $\vec{v}$.

Viel Erfolg!