Klausur September 2021

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

a) Induktionsanfang.

Für $n=1$ gilt $\sum_{k=0}^{0}(3k(k+1)+2)=2=$

$=1^3+1$ ✓

Induktionsschritt.

Annahme: Existiert $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=0}^{n-1}(3k(k+1)+2) = n^3+n \,. \quad (*)$$

Zu zeigen, dass

$$\sum_{k=0}^{n}(3k(k+1)+2) = (n+1)^3+(n+1)\,.$$

Es gilt

$$\sum_{k=0}^{n}(3k(k+1)+2) = \sum_{k=0}^{n-1}(3k(k+1)+2) +$$

$$+3n(n+1)+2 \overset{(*)}{=} n^3+n+3n(n+1)+2=$$

$$= n^3+4n+3n^2+2 = n^3+3n^2+3n+1+$$

$$+n+1 = (n+1)^3+(n+1)$$

q.e.d.

b) $z^3-1=0 \iff z^3=1=1\cdot e^{i\,2\pi k} \Rightarrow$

$\Rightarrow z = \sqrt[3]{1}\cdot e^{i\pi\frac{2k}{3}} \qquad k=0,1,2,3,\dots$

Wir bekommen $z_1=1$, $z_2=e^{i\frac{2}{3}\pi}$,

$z_3=e^{i\frac{4}{3}\pi}$.

Für z_1 gilt $\underline{\operatorname{Re} z_1 = 1,\ \operatorname{Im} z_1 = 0}$.

Für z_2 bekommen wir

$$z_2 = \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\operatorname{Re} z_2 = -\frac{1}{2}, \quad \operatorname{Im} z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

Für z_3 gilt

$$z_3 = \cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\underline{\operatorname{Re} z_3 = -\frac{1}{2}, \quad \operatorname{Im} z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

c) $|2-|2-x|| < 2 \iff -2 < 2-|2-x| < 2 \iff$

$\iff -4 < -|2-x| < 0 \iff 0 < |2-x| < 4$

$\iff [x \neq 2 \text{ und } |2-x| < 4] \iff [-4 < x-2 < 4,$

und $x \neq 2] \iff \underline{\underline{-2 < x < 6 \text{ und } x \neq 2}}$

<u>Aufgabe 2</u>

a) i) Nach dem Taylorsatz gilt

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} + \frac{f''(0)}{2!} + \dots + \frac{f^{(IV)}(0)}{4!} + \frac{f^{(V)}(c)}{5!},$$

wobei $c \in [0, x]$. Für $f(x) = \sin x$ bekommen wir

$f(0) = 0$, $f'(0) = \cos(0) = 1$, $f''(0) = -\sin(0) =$

$f'''(0) = -\cos(0) = -1$, $f^{(IV)}(0) = \sin(0) = 0$,

$f^{(V)}(x) = \cos x$. Daraus folgt

$$\sin x = 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + 0 \cdot x^4 + \frac{\cos(c)}{5!}x^5 .$$

ii) Für $x = 0{,}1$ bekommen wir mit Hilfe des Teils i)

$$\sin(0{,}1) = 0{,}1 - \frac{10^{-3}}{6} + \frac{\cos(c)}{120} \cdot 10^{-5} \iff$$

$$\sin(0{,}1) - \left(0{,}1 - \frac{10^{-3}}{6}\right) = \frac{\cos(c)}{120} \cdot 10^{-5} .$$

Wegen $0 < \cos(c) < 1$ für $0 < c \leq 0{,}1$ gilt

$$0 < \sin(0{,}1) - \left(0{,}1 - \frac{10^{-3}}{6}\right) < \frac{10^{-5}}{120} < 10^{-7} .$$

b) Wegen

$$1 < 1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \tfrac{1}{n} < n \quad \text{und}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

die Konvergenzradius der Reihe ist

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)}} = 1 .$$

Die Potenzreihe ist konvergent innerhalb des Kreises $|z - (1-i)| < 1$ und divergent wenn $|z-(1-i)| > 1$. Am Rand $|z-(1-i)| = 1$ ist die Potenzreihe divergent, weil die Folge

$$a_n = \left(1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \tfrac{1}{n}\right) \cdot (z - (1-i))^n$$

keine Nullfolge ist, denn

$$|a_n| = \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \cdot 1 \not\to 0 .$$

Aufgabe 3

a) i) $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \cdot \sin(x^2)\,dx \underset{du = 2x dx}{\overset{u = x^2}{=}} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \sin u \, du =$

$= \frac{1}{2}(-\cos u)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2}[-(-1)+1] = 1.$

ii) $\int_1^2 \ln x \, dx \underset{\substack{u = \ln x \\ dv = dx,\ v = x}}{\overset{\text{part. Integration}}{=}}$

$= x \ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x}\,dx = 2 \cdot \ln 2 - 0 -$

$- x\Big|_1^2 = 2\ln 2 - 1.$

b) Wir schreiben das Integral als die Summe von drei Integralen

$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x} - 1}{x^{3/2}}\,dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}-1}{x^{3/2}}\,dx + \int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x^{3/2}}\,dx -$

$- \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$.

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx = \lim_{B\to\infty} \int_1^B \frac{1}{x^{3/2}}\,dx =$

$= \lim_{B\to\infty} -2x^{-1/2}\Big|_1^B = 2.$

Wegen $e^{-x} \le e^{-1}$ für $x \ge 1$ das Integral $\int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x^{3/2}}\,dx$ ist konvergent nach

Mit dem (-1)-Ergänzungstrick bekommen wir

$$\mathrm{Kern}(A) = \mathrm{lin}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Nach der Dimensionsformel gilt

$$\dim \mathrm{Ken}(A) + \dim \mathrm{Bild}(A) = 4.$$

$$\Rightarrow \dim \mathrm{Bild}(A) = 4-1=3.$$

Das System $A\bar{x}=\bar{b}$ ist lösbar für alle $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$, weil $\mathrm{Bild}(A) = \mathbb{R}^3$.

b) Widerspruchsbeweis.

Es sei existieren $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2 \neq 0$, so dass $\alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 = 0$ (*)

Wir multiplizieren skalar (*) mit $\vec{v}_1$ und bekommen

$$\alpha_1 < \vec{v}_1, \vec{v}_1 > + \alpha_2 < \bar{v}_1, \vec{v}_2 > + \alpha_3 < \bar{v}_1, \bar{v}_3 > = 0.$$

Wegen $< \bar{v}_1, \bar{v}_2 > = 0$ und $< \bar{v}_1, \bar{v}_3 > = 0$ gilt $\alpha_1 \| \bar{v}_1 \|^2 = 0$. Es ist gegeben, dass $\| \bar{v}_1 \| \neq 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$.

Ähnlich gilt $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$. Widerspuch zeigt, dass $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \bar{v}_3$ linear unabhängig sind.

c) Nach der Projektionsformel gilt für die Orthogonalprojektion von $\vec{w}$ auf $\mathrm{lin}\{\vec{v}\}$

$$W_v = < \vec{w}, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} > \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{<\vec{w},\vec{v}>\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}$$

Majorantenkriterium.

Es bleibt zu beweisen, dass

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}-1}{x^{3/2}}\,dx \quad \text{ist konvergent.}$$

Nach dem Mittelwertsatz für $0<x<1$ $\exists\, \xi \in (0,x)$ mit

$$e^{-x} = 1 + (-e^{-\xi})' \cdot x \quad \text{mit } 0<\xi<x.$$

Deswegen für $0<x<1$

$$|e^{-x}-1| \leq x \cdot |e^{-\xi}| \quad \text{mit } \xi>0.$$

Daraus folgt, dass

$$\left|\frac{e^{-x}-1}{x^{3/2}}\right| \leq \left|\frac{x\cdot 1}{x^{3/2}}\right| = \frac{1}{|x|^{1/2}}$$

und das Integral

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}-1}{x^{3/2}}\,dx \quad \text{ist konvergent nach}$$

Majoranten Kriterium.

c) Beispiel: $\{1,2,1,2,3,1,2,3,4,1,2,3,4,5,$
$1,2,3,4,5,6,1,2,3,4,5,6,7,\ldots\}$.

(**) Siehe Ergänzung ~~dum~~ ~~Teil~~ mit Begründ. am Ende der Lösungen

Aufgabe 4

a)

$$\begin{pmatrix} 1&1&1&1\\ 1&2&3&4\\ 2&4&6&7 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - 2Z_1]{Z_2 \to Z_2 - Z_1} \begin{pmatrix} 1&1&1&1\\ 0&1&2&3\\ 0&2&4&5 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - 2Z_2]{Z_1 \to Z_1 - Z_2} \begin{pmatrix} 1&0&-1&-2\\ 0&1&2&3\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow[Z_2 \to Z_2 - 3Z_3]{Z_1 \to Z_1 + 2Z_3} \begin{pmatrix} 1&0&-1&0\\ 0&1&2&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \quad \text{Zeilennormalform.}$$

$$= \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{1^2+1^2+1^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(**) Ergänzung zu (3c). Bei der Folge kommt jede natürliche Zahl unendlich häufig vor. Insbesondere ist jede natürliche Zahl HW der Folge. Da die Folge nur natürlichen Zahlen hat und mit natürlichen Zahlen können wir keine andere Zahlen approximieren. hat die Folge keine andere Häufungswerte.