Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. Ioannis Anapolitanos

Herbst 2022
12.09.2022

Modulprüfung / Bachelor

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Aufgabe 1 (6 + 12 = 18 Punkte)

a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}.$$

b) Sei $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, mit $f(x) = \frac{20}{9}\sqrt{1+x}$.

- **i)** Bestimmen Sie $T_1(f,0)(x)$ (erstes Taylorpolynom von f um 0).
- **ii)** Bestimmen Sie mit Hilfe von $T_1(f,0)(x)$ eine Approximation von $\sqrt{5}$. Es reicht die Approximation in der Form eines Bruchs von ganzen Zahlen zu geben.

  Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\sqrt{5} = \frac{20}{9}\sqrt{1+\frac{1}{80}}$.
- **iii)** Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Taylor, dass der Fehler der Approximation des Teils **ii)** kleiner als 10^{-4} ist.

Aufgabe 2 (12 + 8 = 20 Punkte)

a) Sei $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}, & \text{für } 0 < |x| \leqslant 2, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

- **i)** Zeigen Sie, dass f stetig ist in $x = 0$.
- **ii)** Zeigen Sie, dass $|f(x)| \leqslant 1 \ \forall x \in [-2, 2]$.
- **iii)** Bestimmen Sie mit Hilfe der Teile **i)** und **ii)** das Bild $f([-2, 2])$. Die Werte $f(-2)$ und $f(2)$ können Ihnen dabei helfen.

b) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz und bestimmen Sie Ihren Wert gegebenenfalls

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{3}{5}\right)^{n+k}.$$

Hinweis: Sie können den Ausdruck umschreiben und den Binomialsatz verwenden.

– **bitte wenden** –

Aufgabe 3 **(4 + 4 + 6 + 6 = 20 Punkte)**

a) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, die Lösungen der Gleichung $z^2 = -|z|^2$ sind.

b) Sei $\gamma < 1$. Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 x^{-\gamma} dx$$

konvergent ist **mittels der Definition der Konvergenz** für uneigentliche Integrale. Bestimmen Sie den Wert des Integrales in Abhängigkeit von γ.

c) Bestimmen den Wert des Integrals $\int_0^1 \arctan(x) dx$. Integrieren Sie hierfür zunächst partiell und substituieren Sie danach geeignet.

d) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der komplexen Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(z - i)^n$. Konvergiert die Potenzreihe für $z = 1$? Begründen Sie Ihre Antwort.
Hinweis: Sie können für geeignetes $x \in \mathbb{R}$ die folgende Gleichheit verwenden (ohne Beweis)

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Aufgabe 4 **(16 + 6 = 22 Punkte)**

a) Wir betrachten die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

i) Bestimmen Sie eine Zeilennormalform von A.

ii) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns von A **ohne** Verwendung des -1 Ergänzungstricks.

iii) Sind die **Spalten** von A linear unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

iv) Existieren $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ so, dass das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ **keine** Lösung hat? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Bestimmen Sie in $\mathbb{R}^3$ die Orthogonalprojektion des Vektors $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ auf der Ebene

$$\operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Viel Erfolg!