1a) Für $n=1$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{k=1}^{1} k(k-1) = 1(1-0) = 0 \\ \frac{1(1-1)(1+1)}{3} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Aussage stimmt}$$

Annahme $\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}$ (*) für ein $n \in \mathbb{N}$

z.Z $\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \frac{(n+1)n(n+2)}{3}$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k-1) = \sum_{k=1}^{n} k(k-1) + (n+1)n \overset{(*)}{=} \frac{n(n-1)(n+1)}{3} + \frac{3(n+1)n}{3}$$

$$= \frac{n(n+1)}{3}\left[(n-1)+3\right] = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad \text{q.e.d.}$$

1b) (i) $f(0) = \frac{20}{9}$ $\quad f'(x) = \frac{10}{9\sqrt{1+x}}$ also $f'(0) = \frac{10}{9}$.

Deshalb $T_1(f,0)(x) = f(0) + x f'(0) = \frac{20}{9} + \frac{10}{9}x$

(ii) Nach Hinweis $\sqrt{5} \approx T_1(f,0)\left(\frac{1}{80}\right) = \frac{20}{9} + \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{80}$

$$= \frac{20}{9} + \frac{1}{9 \cdot 8} = \frac{20 \cdot 8}{9 \cdot 8} + \frac{1}{9 \cdot 8} = \frac{161}{72}.$$

(iii) Nach Taylor $\exists\, c \in \left(0, \frac{1}{80}\right)$ mit

$$\left|\sqrt{5} - T_1(f,0)\left(\frac{1}{80}\right)\right| = \frac{|f''(c)|}{2}\left(\frac{1}{80}\right)^2$$

Aber $f''(c) = -\frac{5}{9}(1+c)^{-\frac{3}{2}}$.

Also $\left|\sqrt{5}-T_1(f,0)\left(\frac{1}{80}\right)\right| = \frac{5}{18}(1+c)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{80}\right)^2 \leq$

$$\underset{c>0}{\overset{\text{da}}{\leq}} \frac{5}{18}\left(\frac{1}{80}\right)^2 = \frac{5}{18}\,\frac{5^2}{4^2}\left(\frac{1}{100}\right)^2 = \frac{125}{144}\cdot 10^{-4} < 10^{-4}.$$

2a) (i) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(2-\sqrt{4-x^2})(2+\sqrt{4-x^2})}{x(2+\sqrt{4-x^2})}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{4-(4-x^2)}{x(2+\sqrt{4-x^2})} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x(2+\sqrt{4-x^2})} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{2+\sqrt{4-x^2}}$$

$= \frac{0}{2+2} = 0 = f(0)$. Also ist f stetig in $x=0$.

(ii) für $x=0$ klar da $f(0)=0$.

$$|f(x)| \leq 1 \iff \left|\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}\right| \leq 1 \iff |2-\sqrt{4-x^2}| \leq |x|$$

$$\overset{\sqrt{4-x^2}\leq 2}{\iff} 2-\sqrt{4-x^2} \leq |x| \iff 2-|x| \leq \sqrt{4-x^2} \overset{|x|\leq 2}{\iff}$$

$$(2-|x|)^2 \leq 4-x^2 \iff 4-4|x|-|x|^2 \leq 4-x^2 \overset{|x|^2=x^2}{\iff} -4|x|\leq 0$$

was stimmt also stimmt die ursprüngliche Ungleichung.

Alternativ: Aus den Umformungen im Teil (i) bekommt man $\forall x \neq 0 \quad f(x) = \dfrac{x}{2+\sqrt{4-x^2}}$

Also $|f(x)| \leq \dfrac{|x|}{2+\sqrt{4-x^2}} \leq \dfrac{|x|}{2} \leq 1$ da $0 \leq |x| \leq 2$.

(iii) Aus (ii) $\quad f([-2,2]) \subseteq [-1,1]$ (1)

f ist aber stetig, da f stetig in 0 (nach (i)) und stetig für $x \neq 0$ als Quotient stetiger Funktionen. (wobei der Nenner nicht verschwindet).

Aber $f(-2) = \dfrac{2-\sqrt{4-(-2)^2}}{-2} = -1$, $f(2) = \dfrac{2-\sqrt{4-(2)^2}}{2} = 1$.

~~Sei~~ Also $-1, 1 \in ([-2,2])$. (2)

Sei $c \in (-1,1)$. Dann nach Zwischenwertsatz da f stetig $\exists\, x_0 \in (-2,2)$ mit $f(x_0) = c$. Deshalb $(-1,1) \subset f([-2,2])$ (3)

(2), (3) $\Rightarrow \quad [-1,1] \subseteq f([-2,2])$. (4)

(1), (4) $\Rightarrow f([-2,2]) = [-1,1]$.

(2b) $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{3}{5}\right)^{n+k} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{3}{5}\right)^k \cdot 1^{n-k}}_{\overset{\text{Binomialsatz}}{=} \left(\frac{3}{5}+1\right)^n}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n \left(\frac{8}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{24}{25}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{24}{25}} = 25,$

da $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, wenn $|z|<1$.

(3a) $z^2 = -|z|^2 \Leftrightarrow z \cdot z = -z\bar{z} \Leftrightarrow$

$z=0$ oder $z=-\bar{z} \Leftrightarrow z=0$ oder $z+\bar{z}=0 \Leftrightarrow$

$z=0$ oder $2\operatorname{Re}(z)=0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z)=0$.

Also $z^2=-|z|^2 \Leftrightarrow z=iy,\ y\in\mathbb{R}$
(alle imaginäre Zahlen).

(b) $\int_r^1 x^{-\gamma}dx = \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}\Big|_r^1 = \frac{1}{1-\gamma} - \frac{\overbrace{r^{1-\gamma}}^{\to 0 \text{ wenn } r\to 0 \text{ da } 1-\gamma>0}}{1-\gamma}$

Also $\lim_{r\to 0} \int_r^1 x^{-\gamma}dx = \frac{1}{1-\gamma}$. Somit ist das

Integral konvergent und sein Wert ist $\frac{1}{1-\gamma}$

c) $\int_0^1 \arctan(x)\,dx = \int_0^1 (x)'\arctan(x)\,dx$

$= x\arctan(x)\Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 x\,(\arctan(x))'\,dx$

$= 1\arctan(1) - 0 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx$

$u = 1+x^2 \Rightarrow du = +2x\,dx \qquad x=0 \rightsquigarrow u=1,\ x=1 \rightsquigarrow u=2.$

Also $\int_0^1 \arctan(x)\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{du}{u}$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln u\Big|_{u=1}^{u=2} \overset{\ln 1 = 0}{=\!=} \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$

(d) $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{\frac{n!}{n^n}}{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \quad \frac{n!}{(n+1)!}$

$= \frac{(n+1)^n(n+1)}{n^n} \frac{1}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e$ Also

$R = e.$

Die Reihe konvergiert für $z=1$, da

$$|1-i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} < e = R.$$

(4a) (i)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - 2Z_1]{Z_2 \to Z_2 - 2Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[Z_1 \to Z_1 - 2Z_2]{Z_3 \to Z_3 - Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 \to Z_1 - 2Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(ii) Mit Hilfe der Zeilennormalform wird das Gleichungssystem

$$\begin{cases} x_1 - 2x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_4 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -2x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_4 \\ 0 \\ -2x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ also } \operatorname{Kern} A = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(iii) Nein, weil 4 Vektoren in $\mathbb{R}^3$ nicht linear unabhängig sein können.

(iv) Nein. Da $\dim \text{Bild} A + \dim \text{Kern} A = 4$ nach Dimensionsformel und $\dim \text{Kern} A = 1$

Gilt $\dim \text{Bild} A = 3 \xRightarrow{\text{Bild} A \subseteq \mathbb{R}^3} \text{Bild} A = \mathbb{R}^3$

Also $A\vec{x} = \vec{b}$ besitzt für alle $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ Lösung(en).

Alternativ: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 & b_2 \\ 2 & 5 & 6 & 6 & b_3 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\text{gleiche}}$ zeilenumformungen wie im Teil (iv) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & c_3 \end{array}\right)$ wobei $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ fest.

das System ist aber lösbar, egal was b_1, b_2, b_3 ist da die Matrix am Ende in zeilennormalform ist und die nicht erweiterte keine Nullzeilen hat.

4(b) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=0$. (Vektoren orthogonal). Also ist eine ONB der Ebene.

$$\vec{b}_1=\frac{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\qquad \vec{b}_2=\frac{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

Also lautet die Orthogonalprojektion

$$\left(\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}\cdot\vec{b}_1\right)\vec{b}_1+\left(\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}\cdot\vec{b}_2\right)\vec{b}_2$$

$$=\left(\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\left(\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}(2+4)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}(2-4)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$=2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}.$$