Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. Ioannis Anapolitanos
Dr. Michael Hofacker

Herbst 2023
27.09.2023

Modulprüfung / Bachelor

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik

Aufgabe 1 (4 + 5 + 3 + 4 + 6 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := xe^x$.

a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$.

b) Begründen Sie mithilfe des Teils **(a)** warum f ein globales Minimum besitzt und bestimmen Sie dieses.

c) Sei $x > 1$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie mithilfe des Teils **(a)** und unter Verwendung des Taylorsatzes, dass es ein c zwischen 1 und x gibt mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)e}{k!}(x-1)^k + \frac{(c+n+1)e^c}{(n+1)!}(x-1)^{n+1}\,.$$

d) Zeigen Sie mithilfe des Teils **(c)**, dass

$$\left| 2e^2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)e}{k!} \right| \leqslant \frac{(n+3)e^2}{(n+1)!}\,.$$

e) Bestimmen Sie ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\left| 2e^2 - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(k+1)e}{k!} \right| < 10^{-8}$ mithilfe des Teils **(d)**. Die Zahl n muss nicht optimal gewählt werden, aber Ihre Rechnung muss die Ungleichung zeigen.

Hinweis: Sie können die Ungleichung $e < 3$ ohne Beweis verwenden.

Aufgabe 2 (4 + (4 + 8) Punkte)

a) Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil der Zahl $(-1 + \sqrt{3}i)^{18}$.

b) **(i)** Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$ gilt $\ln(2) \leqslant \ln(n!) \leqslant n\ln(n)$.

(ii) Wir betrachten die komplexe Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(n!)(z+i)^n\,.$$

Bestimmen Sie mithilfe des Teils **(i)** die Menge K aller $z \in \mathbb{C}$, für welche die Potenzreihe konvergent ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 (5 + 9 + 6 Punkte)

a) Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\int_0^{\ln 2} e^{2x}\sqrt{e^x - 1}\, dx$.

b) Zeigen Sie, dass das folgende uneigentliche Integral konvergent ist

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx.$$

<u>Hinweis:</u> Unter anderem könnte partielle Integration hilfreich sein.

c) Untersuchen Sie, ob die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

in 0 differenzierbar ist und bestimmen Sie $f'(0)$ gegebenenfalls.

Aufgabe 4 (10 + 5 + 7 Punkte)

a) Sei $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ a \end{pmatrix}$, wobei $a \in \mathbb{R}$.

- **(i)** Bestimmen Sie den Kern von C und die Menge aller Lösungen der Gleichung $C\vec{x} = \vec{b}$.
- **(ii)** Gibt es $a \in \mathbb{R}$, so dass $\vec{d}$ im Bild von C ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Die lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$\phi(\vec{e_1}) = \vec{e_1} + \vec{e_2}, \qquad \phi(\vec{e_1} + \vec{e_2}) = 2\vec{e_1} + 3\vec{e_2},$$

wobei $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ die Standardbasisvektoren von $\mathbb{R}^2$ sind. Bestimmen Sie eine Matrix B mit $\phi(\vec{x}) = B\vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$.

c) Seien $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3} \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig und P das Parallelepiped (oder Spat) das von $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ aufgespannt wird. Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine Matrix und $A(P) := \{A\vec{v} : \vec{v} \in P\}$ (Bild von P unter A). Zeigen Sie, dass $\mathrm{Vol}(A(P)) = |\det(A)|\mathrm{Vol}(P)$, wobei $\mathrm{Vol}(\cdot)$ das Volumen des entsprechenden Körpers bezeichnet.

<u>Hinweis</u>: Verwenden Sie die Gleichheit $P = \{\lambda_1\vec{v_1} + \lambda_2\vec{v_2} + \lambda_3\vec{v_3} : \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in [0,1]\}$ und zeigen Sie damit, dass $A(P)$ das Parallelepiped ist, das von $A\vec{v_1}, A\vec{v_2}, A\vec{v_3}$ aufgespannt wird.

Viel Erfolg!